

Metody wyznaczania niepewności pomiarowych

Piotr Andrzej Felisiak

20 września 2022

1 Wprowadzenie i podstawowe definicje

Niniejszy dokument jest krótką prezentacją metod wyznaczania niepewności pomiarowych, bazującą głównie na międzynarodowo uznanym standardzie *Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement*, skrótowo zwanym GUM. W celu głębszego zapoznania się z metodami zaleca się lekturę GUM i powszechnie uznanych podręczników, jak np. [4].

Trudno przecenić znaczenie pomiarów; są one fundamentalnym narzędziem nauk empirycznych oraz inżynierii. Jednakże, każdy pomiar jest obciążony pewną niepewnością i zazwyczaj w nauce—a często w technice—podanie wartości pomiaru bez podania jej niepewności nie przedstawia sobą większej wartości. Poniższy tekst odsłoni najpierw podstawowe definicje, a następnie elementarny aparat matematyczny służący do wyznaczania niepewności.

W Laboratorium posługiwać się będziemy jednostkami układu SI. Wymagana jest znajomość przedrostków od *femto* do *tera*. Proces wyrażania wielkości w *notacji naukowej* można przedstawić następująco: oddzielić pierwszą niezerową cyfrę od drugiej separatorem decymalnym,¹ następnie pomnożyć otrzymaną liczbę przez 10 podniesione do takiej potęgi, aby otrzymać liczbę oryginalną.

Przykład 1.1. Niech $l = 13\,780\text{ m}$; w notacji naukowej $l = 1,3780 \cdot 10^4\text{ m}$.

Notacja inżynierska różni się od naukowej tym, że potęgi dziesiątek po znaku mnożenia są ograniczone do $3n$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2$, itd.

Przykład 1.2. W notacji inżynierskiej $l = 13,780 \cdot 10^3\text{ m}$.

Zakłada się, że w Laboratorium będziemy stosować w obliczeniach notację inżynierską, przy komunikacji werbalnej notację przedrostkową, natomiast przy podawaniu ostatecznych wyników na sprawozdaniach – obie notacje.

Pomiarem (ang. *measurement*) zwiemy proces otrzymywania wartości numerycznej pewnej ilości, np. wielkości fizycznej, gdzie wartość ta jest przyjmowana jako wielokrotność pewnej jednostki miar. *Wielkością mierzoną* (ang. *measurand*) nazywamy wielkość fizyczną będącą przedmiotem pomiaru.

Pojęciem, które stanowi jedno z największych źródeł nieporozumień w metrologii jest pojęcie *błędu*. Jeśli $x \in \mathbb{R}$ to wartość prawdziwa a x_m to wartość zmierzona, w kontekście pomiarów błędem zwiemy

$$\epsilon = x_m - x. \quad (1)$$

Ponieważ prawdziwa wartość nigdy nie jest dokładnie znana, nieznanym jest również ϵ . Błędy można podzielić na dwie kategorie:

1. *błędy losowe*,
2. *błędy systematyczne*.

W przypadku błędów losowych, wartości mierzone są losowo rozmieszczone zarówno powyżej, jak i poniżej wartości prawdziwej, np. przy pomiarze czasu spadania piłki za pomocą stopera źródłem błędów losowych jest niedokładna synchronizacja ręcznego uruchamiania i zatrzymywania stopera, w niektórych przypadkach zbyt wcześnie, w niektórych zbyt późno. Kontynuując ten przykład, jeśli stoper w każdym momencie “spóźnia się” bądź “śpieszy”, zaniżając lub zawyżając każdą z mierzonych wartości, wtedy mamy do czynienia z błędem systematycznym. W przypadku błędu systematycznego, wszystkie wartości mierzone są albo powyżej albo poniżej wartości prawdziwej.

¹W Polsce jest to przecinek, natomiast w niektórych krajach, np. anglosaskich, jest to kropka.

Niepewnością pomiarową (ang. *measurement uncertainty*) zwiemy miarę statystycznej dyspersji² mierzonych wartości wielkości fizycznej. Przypuśćmy, że poprzez $\hat{x}$ oznaczyliśmy estymatę³ prawdziwej wartości x pewnej wielkości fizycznej, natomiast u jest niepewnością tego rezultatu. Wtedy wynik badań zapisujemy jako

$$x = \hat{x} \pm u \Upsilon, \quad (2)$$

gdzie Υ oznacza symbol jednostki, tzn. w miejsce Υ podstawiamy takowy symbol. Wynika z powyższego, że niepewność pomiarowa ma takie same jednostki, jak wielkość mierzona. Wzór (2) można intuicyjnie interpretować jako “istnieje duża szansa, że prawdziwa wartość wielkości fizycznej leży pomiędzy $\hat{x} - u$ a $\hat{x} + u$ ”. Sekcja 2 uściśli, co oznacza wyrażenie “duża szansa” poprzez wprowadzenie pojęcia *przedziału ufności*.

Przykład 1.3. Niech rezultat pomiarów okresu wahań wahadła wynosi $(2,25 \pm 0,05)$ s. Zatem istnieje duże prawdopodobieństwo, że prawdziwa wartość okresu leży pomiędzy 2,20 s a 2,30 s.

Niepewność pomiarowa jest zawsze dodatnia; dla kontrastu, błędy pomiarowe mogą być zarówno dodatnie, jak i ujemne.

Niepewności pomiarowe można podzielić na dwie kategorie:

1. *niepewności typu A*,
2. *niepewności typu B*.

Oba te rodzaje niepewności nie różnią się w swej istocie; różnica polega na sposobie, jakim są znajdowane (obliczane). Niepewności typu A obliczane są metodami statystycznymi, takimi jak opisane w Sekcji 2, natomiast niepewności typu B obliczane są na podstawie informacji podanych w dokumentacji urządzenia pomiarowego, lub—w przypadku dokładnych urządzeń dokonujących pomiarów naukowe—w *raporcie z kalibracji*. Wybrane metody obliczania niepewności typu B podane są w Sekcji 3. Zależnie od okoliczności, w procesie raportowania badań można podawać niepewności typu A i B, odpowiednio u_A i u_B , osobno lub też nie; w tym drugim przypadku podaje się kombinację obu tych niepewności, np. jako $\max(u_A, u_B)$.

Cyfry znaczące (ang. *significant digits*) w notacji pozycyjnej, wyrażającej liczbę, to cyfry niezbędne do wyrażenia tej liczby. Np. przy zapisie odległości 0,052 km tylko cyfry 5 i 2 są znaczące, bowiem $0,052 \text{ km} = 52 \text{ m}$. Z grubsza rzecz biorąc, przez cyfrę znaczącą rozumie się cyfrę różną od zera oraz zera pomiędzy cyframi znaczącymi, jednak formalne reguły klasyfikacji cyfr znaczących są znacznie bardziej wyrafinowane [2]. W Laboratorium podajemy wartości numeryczne estymaty $\hat{x}$ ograniczając się do 4 cyfr znaczących;⁴ w uzasadnionych wypadkach⁵ wystarczą 3 cyfry znaczące. W przypadku niepewności u , na prawo od separatora decymalnego powinno być tyle samo cyfr, co w przypadku wartości estymaty $\hat{x}$; dla przedstawienia u używa się nie więcej niż 2 cyfr znaczących.

Niezmierzalnym jest, aby wartości numeryczne podstawiać pod zmienne dopiero w ostatecznej postaci wzoru; w ten sposób minimalizuje się błędy zaokrągleń oraz umożliwia uproszczenie wzoru poprzez “skręcanie” odpowiednich symboli.

Symbole zmiennych inne niż występujące w instrukcjach winny być precyzyjnie zdefiniowane.

2 Obliczanie niepewności typu A

Polskojęzyczną pozycją, będącą bardzo dobrym wprowadzeniem do koncepcji statystycznych, jest [1]. Aktualną i solidną pozycją anglojęzyczną jest w tym kontekście [3].

W statystyce można wyróżnić dwa przypadki:

1. znane są wartości zmiennej losowej dla wszystkich obiektów populacji,
2. znana są wartości owej zmiennej jedynie dla pewnego podzbioru właściwego populacji, a zatem *próby losowej*.

W Laboratorium będziemy mieć do czynienia tylko z tym drugim przypadkiem.

Rozmiarem (licznością) próby zwiemy liczbę wartości zmiennej losowej $x_1, x_2, \dots, x_n$. W dalszej części tekstu rozmiar będziemy oznaczać przez n .

²Inaczej rozrzutu.

³Tzn. wartość oszacowaną np. poprzez metody statystyczne.

⁴Naturalnie, bez pominięcia separatorów, symboli jednostek, dziesiątek notacji wykładniczej, itp.

⁵Jak np. niska dokładność pomiaru.

Próby losowe można podzielić na *liczne* i *mało liczne*. Dalej przyjmujemy, że za próbę liczną uważa się próbę o rozmiarze większym od 30. Jeśli próba nie jest według tej definicji liczna, mówimy po prostu, że jest mało liczna i właśnie takie będziemy spotykać w Laboratorium, a dokładniej, dobierać poprzez wykonywanie serii pomiarów, gdzie wynik każdego pojedynczego, i -tego pomiaru można postrzegać jako wartość x_i pewnej zmiennej losowej. Wyznaczanie niepewności pomiarowych dla prób mało licznych dokonuje się korzystając z teorii *rozkładu t Studenta* [4, 3].

Definicja 2.1. Jeżeli x_i dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ są wartościami zmiennej losowej,⁶ to średnią $\bar{x}$ tejże próby zwiemy

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}. \quad (3)$$

Poprzez *residuum* ϵ_i dla $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ będziemy rozumieć odchylenie i -tej wartości od średniej, tzn.

$$\epsilon_i = x_i - \bar{x}. \quad (4)$$

W ogólnym przypadku

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i = 0. \quad (5)$$

Oznacza to, że residua są powiązane poprzez powyższe równanie; jeżeli mamy podane $n-1$ residua, wtedy jedyne pozostałe residuum można obliczyć korzystając z tego równania. Dlatego mówimy, że residua mają $\nu = n-1$ *stopni swobody* w przypadku estymowania średniej populacji. W bardziej ogólnym przypadku, gdy staramy się oszacować q parametrów charakteryzujących populację, $\nu = n - q$.

Przykład 2.1. Przy dopasowywaniu linii prostej do 12 danych pomiarowych za pomocą metody najmniejszych kwadratów (regresji liniowej) mamy $q = 2$, zatem $\nu = 10$.

Estymatorem będziemy zwać regułę szacowania parametru charakteryzującego pewną wielkość na podstawie próby losowej, jak np. obserwowanych danych, pomiarów.

Przykład 2.2. Średnia wartości (np. wzrostu) w próbie losowej jest estymatorem średniej w całej populacji.

Estymator jest *obciążony* (ang. *biased*) gdy wartość oczekiwana (szacowana) parametru charakteryzującego populację nie jest równa “rzeczywistej” wartości parametru, tzn. wartości obliczonej na podstawie danych z całej populacji. W przeciwnym wypadku, estymator jest *nieobciążony* (ang. *unbiased*). Staramy się używać estymatorów jak najmniej obciążonych, tzn. takich, dla których różnica pomiędzy szacowaną a rzeczywistą wartością rzeczywistego parametru jest jak najmniejsza.

Definicja 2.2. Nieobciążonym estymatorem *wariancji* jest

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2}{\nu}. \quad (6)$$

Podstawienie n w miejsce ν dałoby obciążony estymator wariancji. W Laboratorium zazwyczaj będziemy estymować średnią pomiarów, zatem liczba stopni swobody ν w tym przypadku będzie równa $n-1$; użycie $n-1$ zamiast n w tym kontekście nazywamy *poprawką Bessela*, redukującą obciążenie estymatora.

Definicja 2.3. Estymatorem *odchylenia standardowego* dla populacji jest

$$s = \sqrt{s^2}. \quad (7)$$

Należy mieć na uwadze, że wyciągnięcie pierwiastka kwadratowego z wariancji powoduje, że takie odchylenie standardowe jest estymatorem obciążonym.⁷ Dzieje się tak dlatego, że operator pierwiastkowania jest funkcją nieliniową. Jednakże (7) jest powszechnie akceptowaną miarą dyspersji pewnej wielkości w jej populacji, wnioskowanej na podstawie próby losowej.

Definicja 2.4. *Niepewnością standardową* $u(\bar{x})$ średniej $\bar{x}$ dla n wzajemnie nieskorelowanych wartości jest

$$u(\bar{x}) = \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (8)$$

⁶Np. wartościami zmierzonymi podczas serii n pomiarów.

⁷Jednak to obciążenie jest znacznie mniejsze, niż w przypadku zignorowania poprawki Bessela.

Definicja 2.5. Niech X będzie próbą losową dobraną z pewnego rozkładu prawdopodobieństwa z parametrem statystycznym θ , który jest estymowany. *Przedziałem ufności*⁸ dla tego parametru, o *współczynniku ufności*⁹ γ będziemy zwać przedział (θ_1, θ_2) , spełniający warunek

$$\Pr(\theta_1 < \theta < \theta_2) = \gamma, \quad (9)$$

gdzie θ_1 i θ_2 są funkcjami wyznaczonymi na podstawie próby losowej a $\Pr(\omega)$ oznacza prawdopodobieństwo, że wyrażenie ω jest prawdziwe.

Ze względu na mały rozmiar danych zbieranych w Laboratorium, założymy, że dane mają rozkład t Studenta. W tym przypadku, przedział ufności będzie zdefiniowany poprzez

$$\theta_1 = \bar{x} - tu(\bar{x}), \quad (10)$$

$$\theta_2 = \bar{x} + tu(\bar{x}), \quad (11)$$

a zatem, podając rezultat szeregu pomiarów w postaci średniej $\bar{x}$ zmierzonych wartości, będziemy go zapisywać w postaci przedziału ufności

$$x = \bar{x} \pm tu(\bar{x}) \Upsilon, \quad (12)$$

dodatkowo podając wartość γ , bez której rezultat byłby równie mało wartościowy, jak w przypadku podania samej średniej. W Laboratorium przyjmujemy, że wyniki podawane są ze współczynnikiem (tzn. poziomem) ufności co najmniej 0,9. Można zauważyć, że powyższy wzór jest szczególną postacią (2) (Υ oznacza symbol jednostki).

Współczynnik rozszerzenia t można obliczyć lub znaleźć z pomocą Tabeli 1, gdzie wartość t można znaleźć na przecięciu wiersza odpowiadającego liczbie stopni swobody ν oraz kolumny odpowiadającej współczynnikowi ufności γ .

Przykład 2.3. Przypuśćmy, że dokonaliśmy szeregu $n = 10$ pomiarów niezmiennego napięcia woltomierzem cyfrowym i chcemy obliczyć niepewność typu A dla tego szeregu. Zmierzone wartości, wyrażone w woltach, wynoszą: 2,87; 2,91; 2,89; 2,88; 2,87; 2,88; 2,86; 2,95; 2,88; 2,90. Średnia dla tej próby, obliczona za pomocą (3), wynosi $\bar{x} = 2,889$ V. Według (6) wariancja tej próby wynosi $s^2 \approx 0,6767 \cdot 10^{-3}$ V. Zatem, na mocy (7), odchylenie standardowe dla tej próby, a tym samym estymata odchylenia standardowego dla nieskończonej wielkiej populacji pomiarów, wynosi $s \approx 26,01 \cdot 10^{-3}$ V. Korzystając z (8), obliczamy niepewność standardową obliczonej średniej otrzymując $u(\bar{x}) \approx 8,225 \cdot 10^{-3}$ V. W celu znalezienia przedziału ufności zakładamy współczynnik ufności $\gamma = 0,95$ oraz odwołujemy się do Tabeli 1, aby znaleźć współczynnik rozszerzenia t : mając $\nu = n - 1 = 9$ stopni swobody, wybieramy wiersz tabeli rozpoczynający się od liczby 9 i znajdujemy liczbę na przecięciu tego wiersza oraz kolumny dla $\gamma = 0,95$; liczba ta to $t = 2,262$. Wykorzystując (12), nareszcie jesteśmy na pozycji, aby zaprezentować wynik:

$$U = 2,889 \pm 0,019 \text{ V}, \quad \gamma = 0,95, \quad (13)$$

co można intuicyjnie zinterpretować jako: “na 95% jest prawdopodobnym, aby prawdziwa wartość napięcia znajdowała się w przedziale $2,889 \pm 0,019$ V”. Przy podawaniu wyniku, należy zwrócić uwagę na poprawną liczbę cyfr.

3 Obliczanie niepewności typu B

Niepewności typu B obliczane są na podstawie informacji charakterystycznych dla danego urządzenia pomiarowego, podanych w dokumentacji urządzenia bądź też raporcie z kalibracji urządzenia. W szczególności, inne reguły rządzą obliczaniem niepewności typu B dla mierników analogowych, a inne dla mierników cyfrowych; podstawowe metody dla obu tych przypadków ukazano poniżej.

Zakresem pomiarowym miernika wielkości fizycznej będziemy zwać maksymalną dopuszczalną przez miernik wartość tej wielkości. Przekroczenie tej wartości może uszkodzić miernik. Dlatego w celu ochrony miernika, pomiary rozpoczyna się od najwyższego zakresu. Jednak zwykle pomiar wartości x tejże wielkości jest tym dokładniejszy, im x jest bliższa zakresowi; dlatego jeśli wskazana wartość jest niższa niż niższy z zakresów, wtedy takowy zakres wybieramy.

⁸Pojęcie przedziału ufności zostało wprowadzone do statystyki przez matematyka polskiego pochodzenia Jerzego Sławę-Neymana.

⁹Zwanym również poziomem ufności.

Tabela 1: Tablica współczynników rozszerzenia dla rozkładu t Studenta

ν	γ										
	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,995	0,998	0,999
1	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	127,3	318,3	636,6
2	0,816	1,080	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,09	22,33	31,60
3	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,21	12,92
4	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,767
24	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659

Przykład 3.1. Załóżmy, że mamy pewność, że napięcie nie przekracza 200 V. Rozpoczynamy pomiar od tego zakresu; miernik wskazał 15,2 V. Oznacza to, że jesteśmy uprawnieni do zmniejszenia zakresu do 20 V. Miernik może teraz wskazać dokładniejszą wartość, 15,18 V.

Wyboru zakresu dokonujemy zazwyczaj obracając pokrętkę zakresowe; w niektórych przypadkach, zwłaszcza w przypadku pomiarów natężenia prądu, zakres wybierany jest również poprzez umieszczenie przewodu pomiarowego w odpowiednim gnieździe, np. jedno z gniazd służy do pomiarów prądów “wysokich” ≤ 20 A, a inne do prądów “niskich” ≤ 200 mA. W przypadku watomierzy analogowych, zakresem mocy jest iloczyn zakresu napięcia cewki napięciowej i zakresu prądu cewki prądowej watomierza.

3.1 Przypadek mierników analogowych

Niepewność typu B pomiaru wartości x , dokonanego za pomocą miernika analogowego klasy κ przy zakresie x_r , obliczana będzie poprzez

$$u_B(x) = \frac{k\kappa x_r}{100\sqrt{3}}, \quad (14)$$

gdzie współczynnik k dla wybranego poziomu ufności wybiera się korzystając z Tabeli 2.

3.2 Przypadek mierników cyfrowych

Przez cyfrę *najmniej znaczącą* będziemy rozumieć potęgę dziesiątki wynikającą z pozycji dziesiątnej cyfry stającej najbardziej na prawo we wskazaniu miernika cyfrowego.

Tabela 2: Tablica współczynników k dla obliczania niepewności mierników analogowych

Poziom ufności	k
0,68	1
0,95	2
0,99	3

Przykład 3.2. Załóżmy, że miernik wskazuje 3,57 V. Cyfrą najmniej znaczącą według powyższej definicji jest 10^{-2} , tzn. 0,01.

Niepewności wskazań mierników cyfrowych podaje się w formatach takich jak np. $\pm(0.5\% + 1 \text{ digit})$, $\pm(3\% + 5)$, $\pm(1.2\% + 3 \text{ dgt})$ i tym podobnych. Liczba stojąca przed znakiem % oznacza procent wskazania miernika, natomiast liczba po znaku + oznacza wielokrotność cyfry najmniej znaczącej.

Przykład 3.3. Załóżmy, że miernik wskazuje $U = 27,00 \text{ V}$ i jego dokumentacja podaje, że dla ustalonego zakresu niepewność wskazania wynosi $\pm(1,2\% + 5)$. Zatem niepewność typu B tego wskazania $u(U) = 1,2\% \cdot 27 + 5 \cdot 0,01 = 0,374 \text{ V}$, co, biorąc pod uwagę postać wskazania, należy zaokrąglić¹⁰ do 0,38 V. Ostatecznie, podajemy wynik $U = 27,00 \pm 0,38 \text{ V}$.

4 Obliczanie niepewności pomiarów pośrednich

W Sekcji 3 rozważaliśmy przypadek *pomiarów bezpośrednich*, tzn. takich, gdzie wartość mierzonych wielkości jest bezpośrednio wskazywana przez przyrząd pomiarowy. W tej sekcji skupimy się nad *pomiarami pośrednimi*, tzn. takimi, gdzie poszukiwana wartość jest *obliczana* na podstawie pomiarów bezpośrednich. Dla przykładu, w pomiarze rezystancji metodą techniczną (pomiar pośredni) rezystancja jest obliczana na podstawie pomiarów bezpośrednich napięcia i natężenia prądu. Mówimy, że y jest wartością wielkości mierzonych pośrednio na podstawie wartości $x_1, x_2, \dots, x_m$ wielkości mierzonych bezpośrednio, jeżeli y jest funkcją tych wartości, tzn. $y = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Jeżeli $x_1, \dots, x_m$ są wzajemnie nieskorelowane, to wtedy i tylko wtedy niepewność standardową dla y można obliczyć poprzez

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} u(x_i) \right)^2}, \quad (15)$$

gdzie $u(x_i)$ jest niepewnością standardową x_i .¹¹

Przykład 4.1. Przypuśćmy, że na podstawie pomiaru napięcia U i natężenia prądu I chcemy wyznaczyć rezystancję $R = \frac{U}{I}$, oraz niepewność standardową tej wartości $u(R)$. Załóżmy, że wyznaczyliśmy niepewności standardowe dla napięcia i prądu, odpowiednio $u(U)$ i $u(I)$, jak opisano w sekcjach 2 i 3. Ponieważ $\frac{\partial R}{\partial U} = \frac{1}{I}$ oraz $\frac{\partial R}{\partial I} = -\frac{U}{I^2}$, z (15) mamy $u(R) = \sqrt{\left[\frac{1}{I}u(U)\right]^2 + \left[-\frac{U}{I^2}u(I)\right]^2}$.

Literatura

- [1] Zdzisław Hellwig. *Elementy Rachunku Prawdopodobieństwa i Statystyki Matematycznej*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 13th edition, 1998.
- [2] Nicholas J. Higham. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2nd edition, 2002.
- [3] Robert V. Hogg, Joseph W. McKean, and Allen T. Craig. *Introduction to Mathematical Statistics*. Pearson, Boston, 8th edition, 2019.
- [4] L. Kirkup and R. B. Frenkel. *An Introduction to Uncertainty in Measurement: Using the GUM (Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement)*. Cambridge University Press, 2006.

¹⁰W przypadku niepewności, zaokrąglamy zawsze do wyższej liczby.

¹¹Nie odgrywa roli, czy te niepewności są typu A czy też B.