

5. Rezonans napięć i prądów

Cel ćwiczenia:

- Wyznaczenie krzywej rezonansowej dla szeregowego i równoległego obwodu RLC.

Zagadnienia:

- Fizyczne podstawy zjawiska rezonansu.
- Możliwości zastosowania zjawisk rezonansu w nauce i technice.
- Różne aspekty wykorzystania zjawiska rezonansu w energetyce (kompensacja mocy biernej, rezonatory).
- Metodologia badania zjawiska rezonansu.
- Badanie zjawiska przepięcia i przetężenia podczas występowania rezonansu napięć i prądów.

Uwaga! Przed przystąpieniem do ćwiczenia zapoznać się z dodatkiem pt. „Procedura wyznaczania niepewności pomiarowych”.

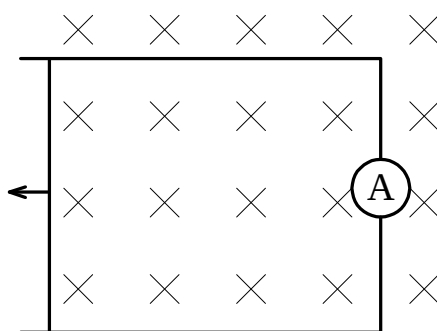
Wprowadzenie:

Zjawisko rezonansu elektrycznego jest zjawiskiem bardzo istotnym i jest wykorzystywane w wielu dziedzinach elektrotechniki i energetyki. Między innymi we wszelkiego rodzaju szeroko rozumianych odbiornikach radiowych do np. dostrajania odbiorników do częstotliwości nośnej. W energetyce zjawisko rezonansu wykorzystuje się do kompensacji mocy biernej.

We współczesnej elektrotechnice bardzo istotne znaczenie ma zjawisko indukcji elektromagnetycznej zwane (od nazwiska jego odkrywcy) zjawiskiem *Faraday'a*. Polega ono na indukowaniu siły elektromotorycznej w obwodzie zamkniętym pod wpływem ruchu tego obwodu w polu magnetycznym.

Weźmy obwód jak pokazany na rys. 5.1.

Wtedy



Rys. 5.1. Ilustracja zjawiska *Faraday'a*.

$$E_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Indukowana SEM jest proporcjonalna do szybkości zmiany strumienia magnetycznego w danym obwodzie. Znak minus związany jest z regułą *Lenza*, która mówi, że kierunek prądu indukowanego jest taki, że pole magnetyczne przezeń wywołane przeciwstawia się zmianę zewnętrznego strumienia magnetycznego.

W przypadku cewki:

$$\Phi = L \cdot i ,$$

współczynnik proporcjonalności L zwany jest indukcyjnością cewki. Jego jednostką jest henr H

$$H = \frac{V}{\frac{A}{s}} .$$

Dla cewki siła elektromotoryczna indukcji wyraża się zależnością

$$E_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt} .$$

Prąd przemienny charakteryzuje się okresowo zmieniającymi się w czasie wartościami natężenia i kierunku prądu. Weźmy przypadek prądu sinusoidalnie zmiennego. Wtedy natężenie i napięcie prądu opisuje się zależnościami:

$$u(t) = U_0 \sin \omega t$$

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi) ,$$

gdzie φ jest przesunięciem fazowym między napięciem i natężeniem prądu (różnica faz początkowych).

Rezonans szeregowy RLC

W obwodach elektrycznych RLC następują kolejne przemiany energii pola elektrycznego w energię pola magnetycznego i odwrotnie.

W obwodach elektrycznych można wywołać drgania wymuszone. Weźmy obwód szeregowy złożony z rezystora o oporze R , cewki indukcyjnej o indukcyjności L , kondensatora o pojemności C oraz źródła sinusoidalnie zmiennego napięcia

$$e(t) = E_0 \cdot \sin \omega t .$$

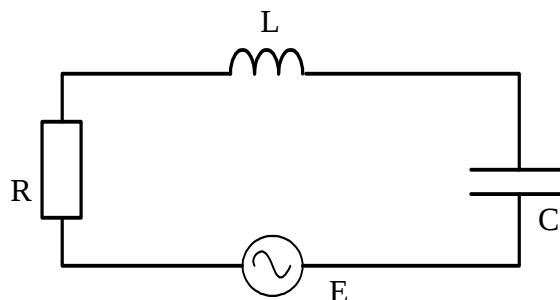
Na podstawie II prawa *Kirchhoffa* – suma czynnych w obwodzie sił elektromotorycznych e , E_L równa się sumie spadków napięcia u_R , u_C – można ułożyć równanie:

$$u_R + u_C = e + E_L$$

Korzystając z następujących praw i zależności:

- prawa *Ohma* opisującego spadek napięcia na rezystorze: $u_R = i \cdot R$,

- prawa indukcji elektromagnetycznej *Faraday'a* opisującego zależność siły elektromotorycznej indukcji własnej E_{ind} [V] od zmiany strumienia magnetycznego w danym obwodzie Φ [Wb]



Rys. 5.2. Szeregowy obwód RLC.

$$E_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

W szczególności dla cewki siła elektromotoryczna zależy od natężenia prądu i [A] i indukcyjności własnej obwodu zwanej także współczynnikiem indukcji własnej lub samoindukcji

$$[L] = H = \frac{1V}{1A/s} = 1\Omega \cdot s$$

$$E_{\text{ind}} = -L \frac{di}{dt}.$$

- zależności pomiędzy pojemnością kondensatora a ładunkiem zgromadzonym na jego okładkach $C = \frac{Q}{u_c}$. Ponieważ $i = \frac{dQ}{dt}$, stąd $u_c = \frac{Q}{C} = \frac{\int i \cdot dt}{C}$.

Otrzymujemy równanie:

$$R \cdot i + \frac{\int i dt}{C} = E_0 \sin \omega t - L \frac{di}{dt}.$$

Po zrózniczkowaniu otrzymujemy:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = E_0 \omega \cos \omega t - L \frac{d^2 i}{dt^2}$$

lub

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = E_0 \omega \cos \omega t.$$

Po rozwiązaniu równania otrzymujemy:

$$i(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\text{gdzie } \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R},$$

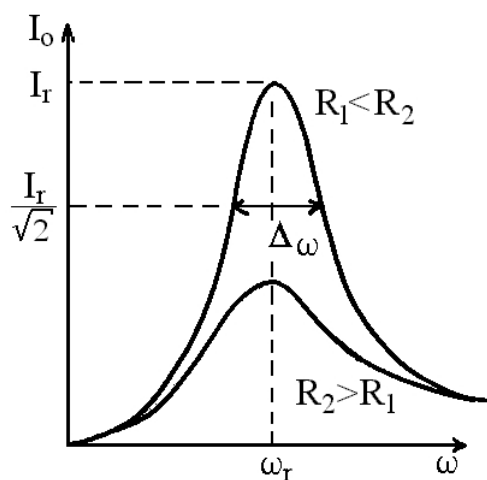
i

$$I_0 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{E_0}{Z}. \quad (*)$$

Oznacza to, że po pewnym czasie od chwili podłączenia do obwodu RLC wymuszającej siły elektromotorycznej E ustalony prąd wymuszony w obwodzie:

- ma przebieg sinusoidalny o częstotliwości ω równej częstotliwości wymuszającej siły elektromotorycznej E ,
- wykazuje przesunięcie fazowe względem E ,
- ma amplitudę zależną od amplitudy i częstotliwości wymuszającej siły elektromotorycznej, od rezystancji, pojemności i indukcyjności elementów obwodu RLC (równanie*).

Dla stałych wartości parametrów obwodu RLC, amplituda prądu I_0 w funkcji częstotliwości ω wymuszającej siły elektromotorycznej E przedstawia się następująco:



Rys. 5.3. Zależność amplitudy prądu wymuszonego w obwodzie RLC od częstotliwości wymuszającej siły elektromotorycznej.

Na zaprezentowanych krzywych można zauważyć pewne prawidłowości:

- przy pewnej częstotliwości zwanej częstotliwością rezonansową obserwuje się maksima krzywych,
- maksima (wartość) te zależą jedynie od rezystancji R ,
- częstotliwość rezonansowa zależy od indukcyjności L i pojemności C .

Powróćmy do równania (*). Zastanówmy się kiedy wystąpi maksimum krzywej $I_0 = f(E_0, R, L, C, \omega)$? Otóż maksimum to występuje gdy mianownik równania (*) przyjmie wartość minimalną czyli, gdy:

$$\omega L = \frac{1}{\omega C} \quad \text{warunek na rezonans w obwodzie RLC}$$

stąd

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

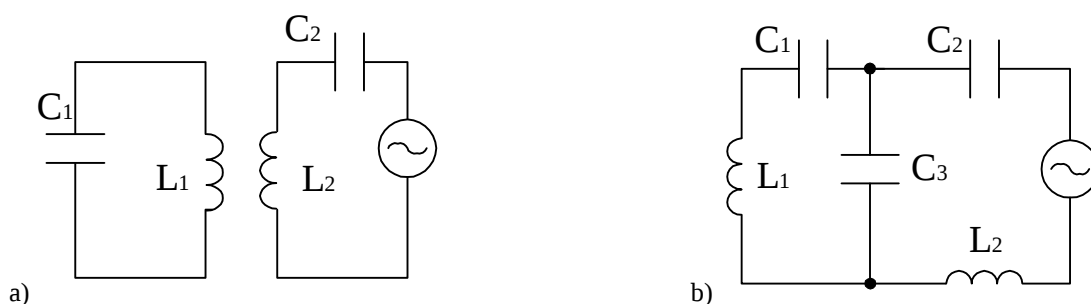
Biorąc to pod uwagę, w rezonansie:

$$I_0^{\text{rez}} = \frac{E_0}{R}.$$

Rezonans polega więc na „gwałtownym” wzroście amplitudy natężenia prądu w obwodzie przy zbliżaniu się częstości do częstości rezonansowej – rezonans napięć.

Rezonans elektromagnetyczny może wystąpić podczas oddziaływania na siebie dwóch obwodów RLC (sprzężenie indukcyjne lub pojemnościowe). Warunek rezonansu w tym przypadku może prowadzić do zależności:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$



Rys. 5.4. Sprzężenie indukcyjne (a) i pojemnościowe (b) dwóch obwodów RLC.

Rezonans szeregowy – rezonans napięć bo przy częstości rezonansowej amplitudy napięć na cewce i kondensatorze są równe $U_L = U_C$ podczas gdy fazy ich są przeciwne.

Straty energii w obwodzie RLC opisuje się za pomocą współczynnika dobroci Q :

$$Q = 2\pi \frac{E}{\Delta E}$$

E – energia naładowanego kondensatora i pola magnetycznego cewki,

ΔE – energia rozproszona na oporniku R w ciągu jednego okresu w postaci ciepła.

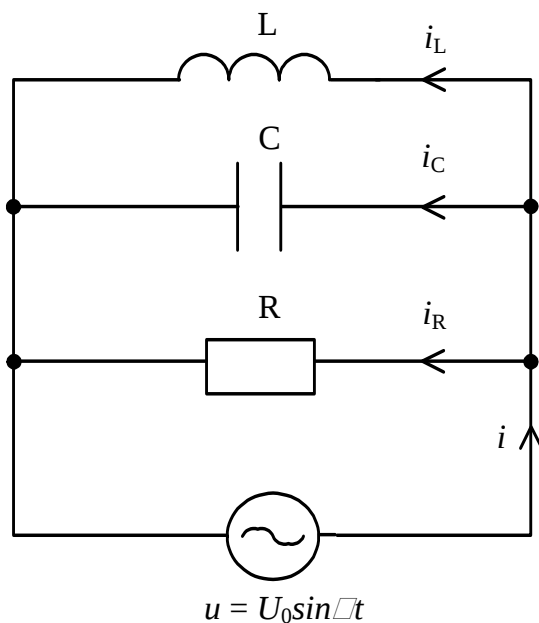
Stąd

$$Q = \frac{\omega_{\text{rez}} L}{R} = \frac{1}{\omega_{\text{rez}} CR} = \frac{\omega_{\text{rez}}}{\Delta\omega}$$

gdzie $\Delta\omega$ – szerokość krzywej rezonansowej dla $I = \frac{I_{\text{rez}}}{\sqrt{2}}$.

Rezonans równoległy RLC.

Weźmy obwód pokazany na rysunku.



Rys. 5.5. Równoległy obwód RLC.

W przypadku obwodu przedstawionego na rys 5.5 korzystamy z I prawa *Kirchhoffa*.

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

Następnie rozwiązujemy odpowiednie równanie różniczkowe.

Analizę tego obwodu można także przeprowadzić wykorzystując prawo *Ohma* dla prądu zmiennego oraz zapis prądu w postaci liczb zespolonych:

$$i = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$u = U_0 e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{1/j\omega C} + \frac{1}{R}$$

$$i = \frac{u}{Z}.$$

Otrzymujemy, że amplituda prądu płynącego przez taki obwód I_0 wyraża się zależnością:

$$I_0 = U_0 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$$

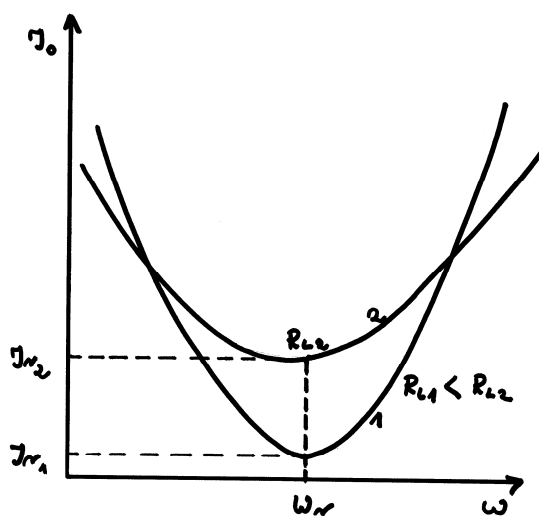
$$\varphi = \arctg \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}}.$$

Przy rezonansie równoległym, inaczej zwanym rezonansem prądów, amplituda prądów osiąga wartość minimalną:

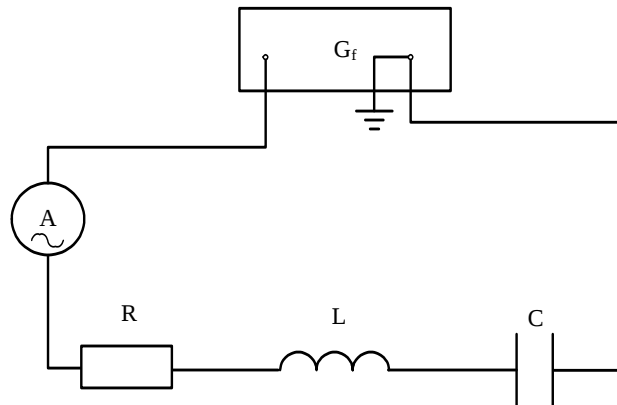
$$I_0^{\min} = \frac{U_0}{R}$$

dla

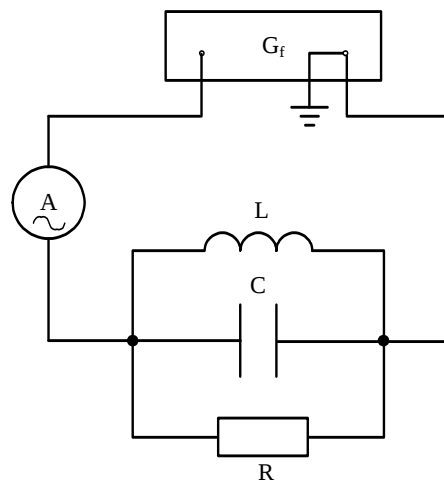
$$\omega_{\text{rez}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$



Rys. 5.6. Zależność amplitudy prądu od częstotliwości dla obwodu równoległego.



Rys. 5.7. Schemat układu pomiarowego do wyznaczenia rezonansu szeregowego.

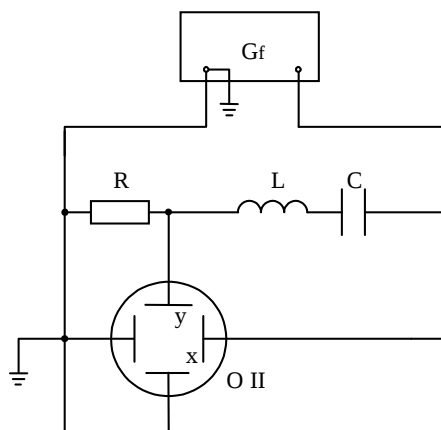


Rys. 5.8. Schemat układu pomiarowego do wyznaczenia rezonansu równoległego.

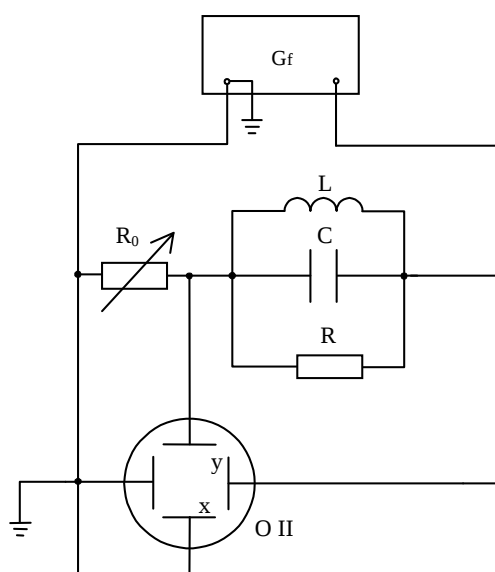
Przebieg ćwiczenia:

Układ pomiarowy zbudowany jest z:

- generatora funkcyjnego będącego źródłem sygnału sinusoidalnego o regulowanej częstotliwości – G_f ,
- elementów R , L i C połączonych w sposób szeregowy i równoległy,
- miliamperomierza – A ,
- woltomierza – V ,
- oscyloskopu dwukanałowego służącego do obserwacji przebiegu napięcia i natężenia prądu oraz krzywych *Lissajous* – OII.



Rys. 5.9. Podłączenie obwodu szeregowego do oscyloskopu.



Rys. 5.10. Podłączenie obwodu równoległego do oscyloskopu.

Zadania:

1. Zmontować układ pomiarowy do wyznaczenia rezonansu szeregowego.
2. Zmieniając częstotliwość sygnału wejściowego f (wartość napięcia zasilającego pozostaje stała) mierzyć wartość natężenia prądu w obwodzie.
3. Narysować przebieg krzywej rezonansowej.
4. Wyznaczyć graficznie częstotliwość rezonansową.
5. Obliczyć współczynnik dobroci obwodu.
6. Podłączyć układ do oscyloskopu zgodnie ze schematem.
7. Wyznaczyć zależność przesunięcia fazowego φ od częstotliwości.
8. Powtórzyć procedurę pomiarową dla rezonansu równoległego.
9. Wyniki pomiarowe przedstawić w tabelach.
10. Rysunki sporządzić na papierze milimetrowym.
11. Opracować wnioski kładąc główny nacisk na istotę zjawiska rezonansu oraz na dyskusję niepewności pomiarowych.

Literatura:

Piekara A.H., *Elektryczność i magnetyzm*, rozdz. IV, PWN, Warszawa 1970.
 Jaworski B., Dietlałf A., Miłkowska L., *Kurs fizyki*, t.II, PWN, Warszawa 1971.