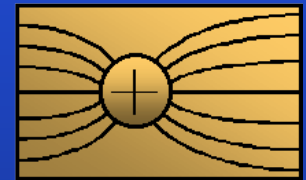




Politechnika Wrocławska



Wydział Mechaniczno-Energetyczny



Podstawy elektrotechniki

Prof. dr hab. inż. Juliusz B. Gajewski, prof. zw. PWr

Wybrzeże S. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Bud. A4 „Stara kotłownia”, pokój 359

Tel.: 71 320 3201

Fax: 71 328 3218

E-mail: juliusz.b.gajewski@pwr.edu.pl

Internet: www.itcmp.pwr.wroc.pl/elektra



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

E l e k t r o s t a t y k a jest nauką o ładunkach elektrycznych w spoczynku, ich polach elektrycznych oraz potencjałach.

Według *McGraw-Hill Dictionary of Scientific and Technical Terms*, McGraw-Hill Company, New York – St. Louis – San Francisco 1984.

E l e k t r o s t a t y k a jest nauką o zjawiskach elektrycznych związanych z ładunkami elektrycznymi niezmiennymi w czasie i nieruchomymi w danym układzie inercyjnym zarówno względem siebie, jak i względem obserwatora.

Według *Elektryczność i magnetyzm*, A. Bajorski, S. Dołżycki, R. Kurdziel, A. Skopec, Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1990.

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

E l e k t r o s t a t y k a jest klasą zjawisk rozpoznawanych przez obecność ładunków elektrycznych, albo statycznych albo poruszających się, i oddziaływania występującego jedynie z powodu tych ładunków i ich położenia, a nie z powodu ich ruchu.

Według *IEEE*.

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

$$q_v = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

$$q_v = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \Delta S \rightarrow 0}} \frac{\Delta Q}{h \Delta S} \rightarrow \infty$$

$$q_s = \lim_{h \rightarrow 0} h q_v = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

$$q_l = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}$$

$$Q = \int_V q_v dV$$

$$Q = \int_S q_s dS$$

$$Q = \int_l q_l dl$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

P o l e e l e k t r y c z n e jest to przestrzeń, w której znajdują się i oddziałują ze sobą ładunki elektryczne dodatnie i ujemne.

P o l e e l e k t r o s t a t y c z n e jest to takie pole elektryczne, które jest czasowo niezależne i w którym znajdują się i oddziałują ze sobą stacjonarne, czyli niezmiennie w czasie i nieruchome względem ziemi, ładunki elektryczne dodatnie i ujemne.

Pola elektryczne i elektrostatyczne należą do **pól wektorowych**.

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Prawo (siła) *Coulomba*

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

ϵ_0 — przenikalność elektryczna próżni ($= 8.854 \times 10^{-12}$ F/m)

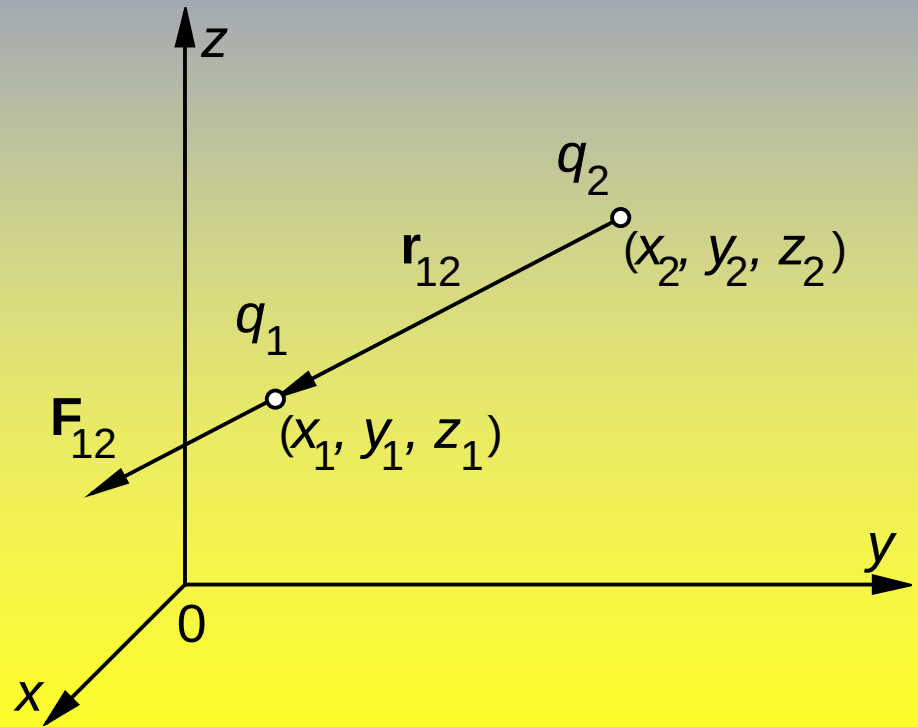
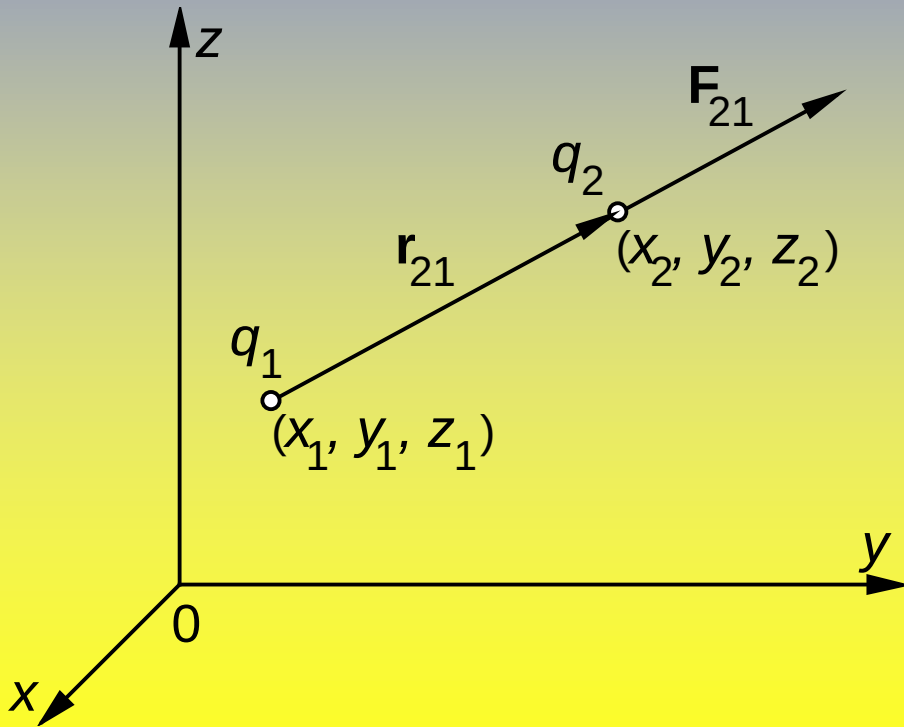
ϵ — przenikalność elektryczna względna
stała dielektryczna [–]

$\epsilon\epsilon_0$ — przenikalność bezwzględna [Fm⁻¹]

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Siła Coulomba



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Siła Coulomba

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}_{12}}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_{12}$$

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \frac{\mathbf{r}_{21}}{r} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} \mathbf{1}_{21}$$

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \quad \text{i} \quad F_{12} = F_{21}$$

$$\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{r}_{21} \quad \text{i} \quad r = |\mathbf{r}_{12}| = |\mathbf{r}_{21}|$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

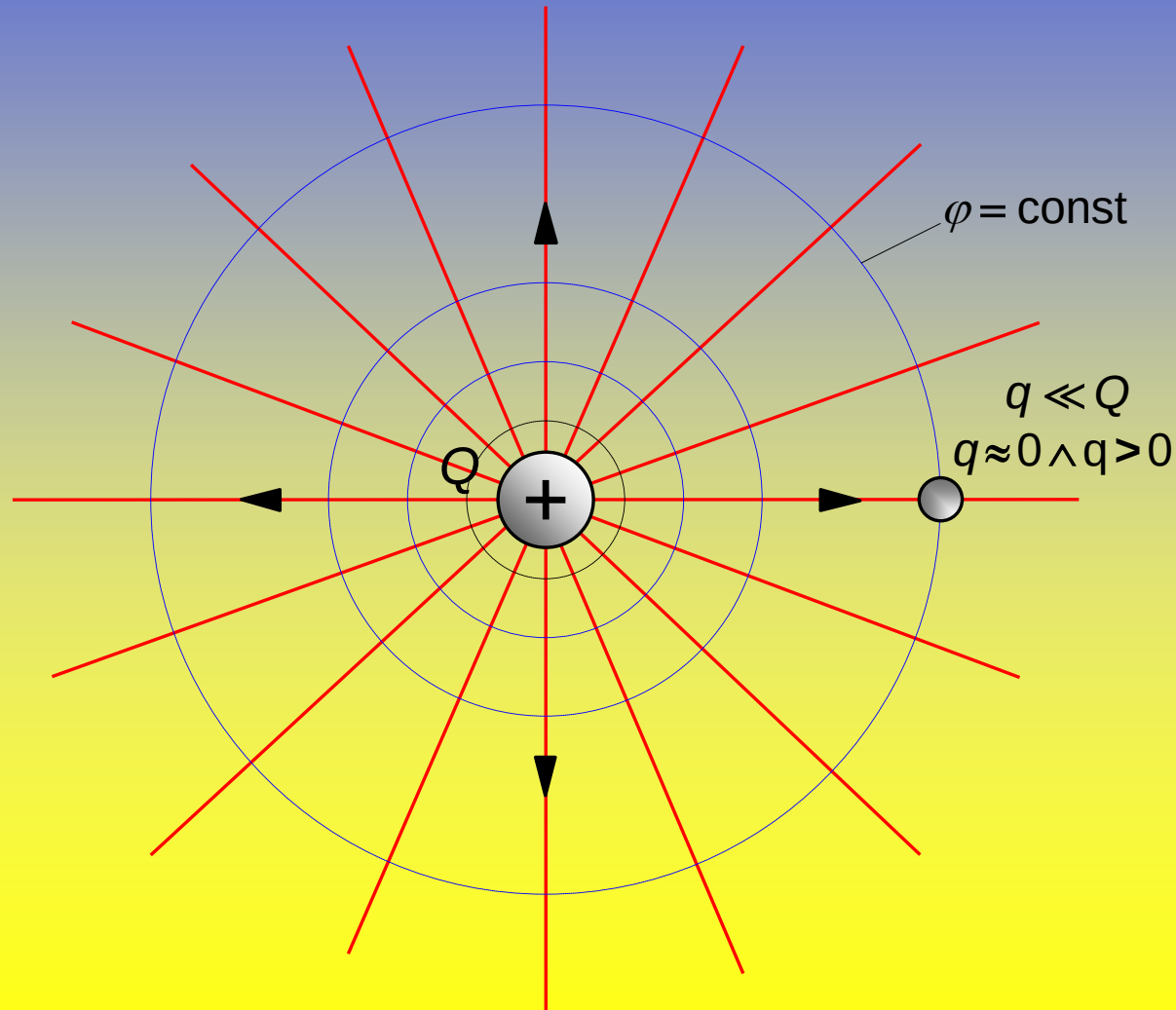
Siła Coulomba

- ❏ Ładunki jednoimiennne $q_1 q_2 > 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{12}$ i $\mathbf{r}_{12}$ oraz $\mathbf{F}_{21}$ i $\mathbf{r}_{21}$ zgodne $\Rightarrow q_1$ i q_2 odpychają się.
- ❏ Ładunki różnoimiennne $q_1 q_2 < 0 \Rightarrow \mathbf{F}_{12}$ i $\mathbf{r}_{12}$ oraz $\mathbf{F}_{21}$ i $\mathbf{r}_{21}$ przeciwne $\Rightarrow q_1$ i q_2 przyciągają się.

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Natężenie pola elektrycznego



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Natężenie pola elektrycznego

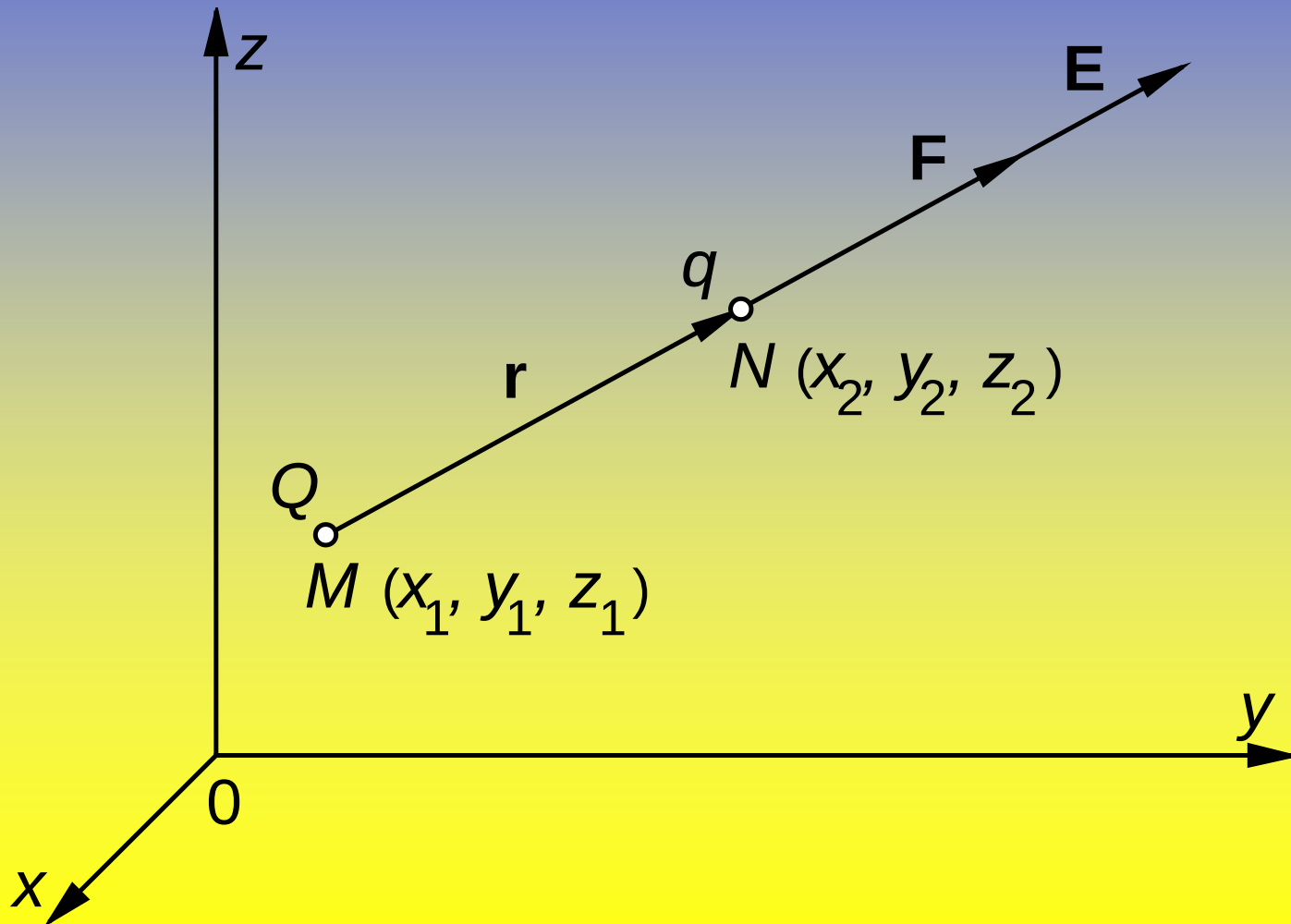
$$\mathbf{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Natężenie pola elektrycznego



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Natężenie pola elektrycznego

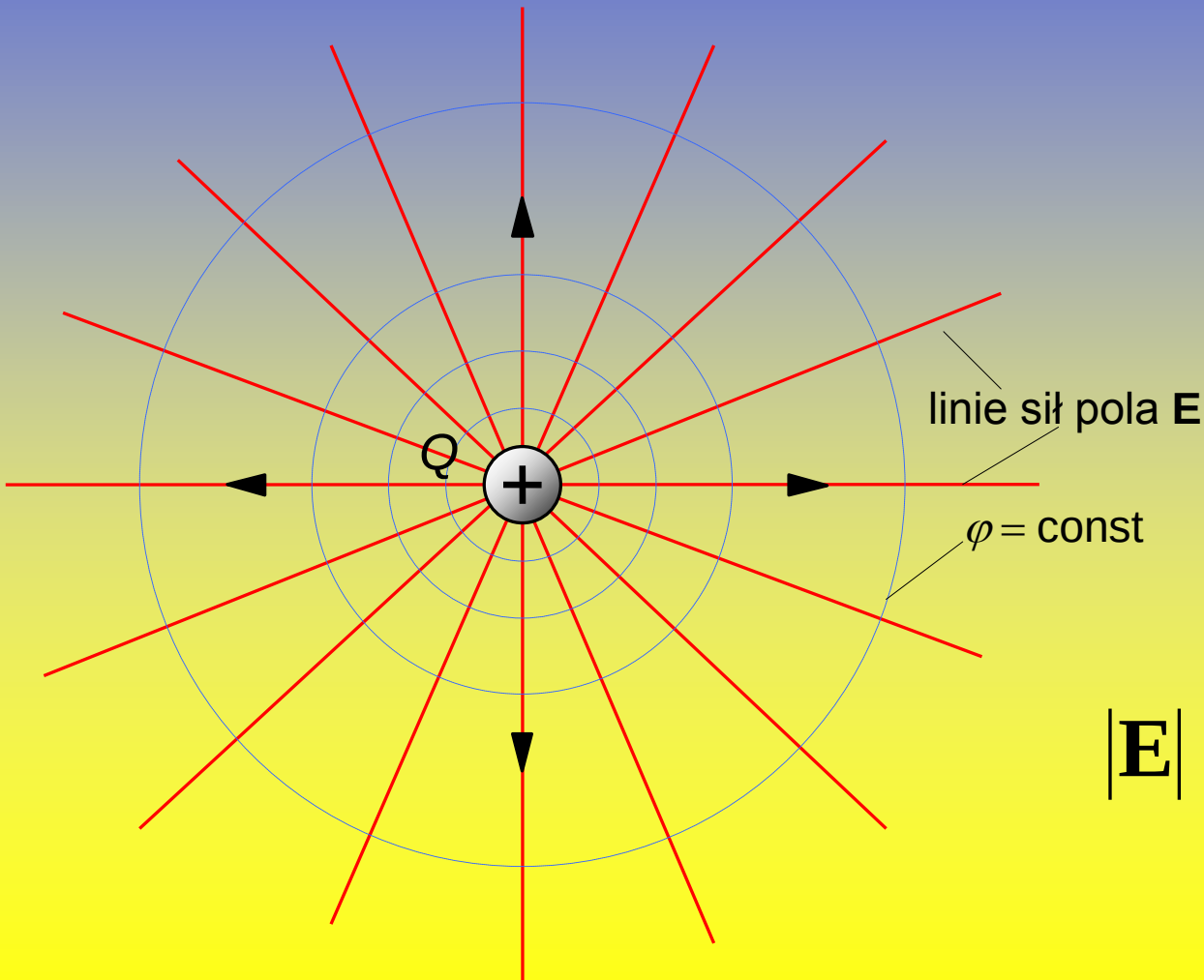
$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3} [\mathbf{i}(x_2 - x_1) + \mathbf{j}(y_2 - y_1) + \mathbf{k}(z_2 - z_1)]$$

$$|\mathbf{r}| = r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Natężenie pola elektrycznego

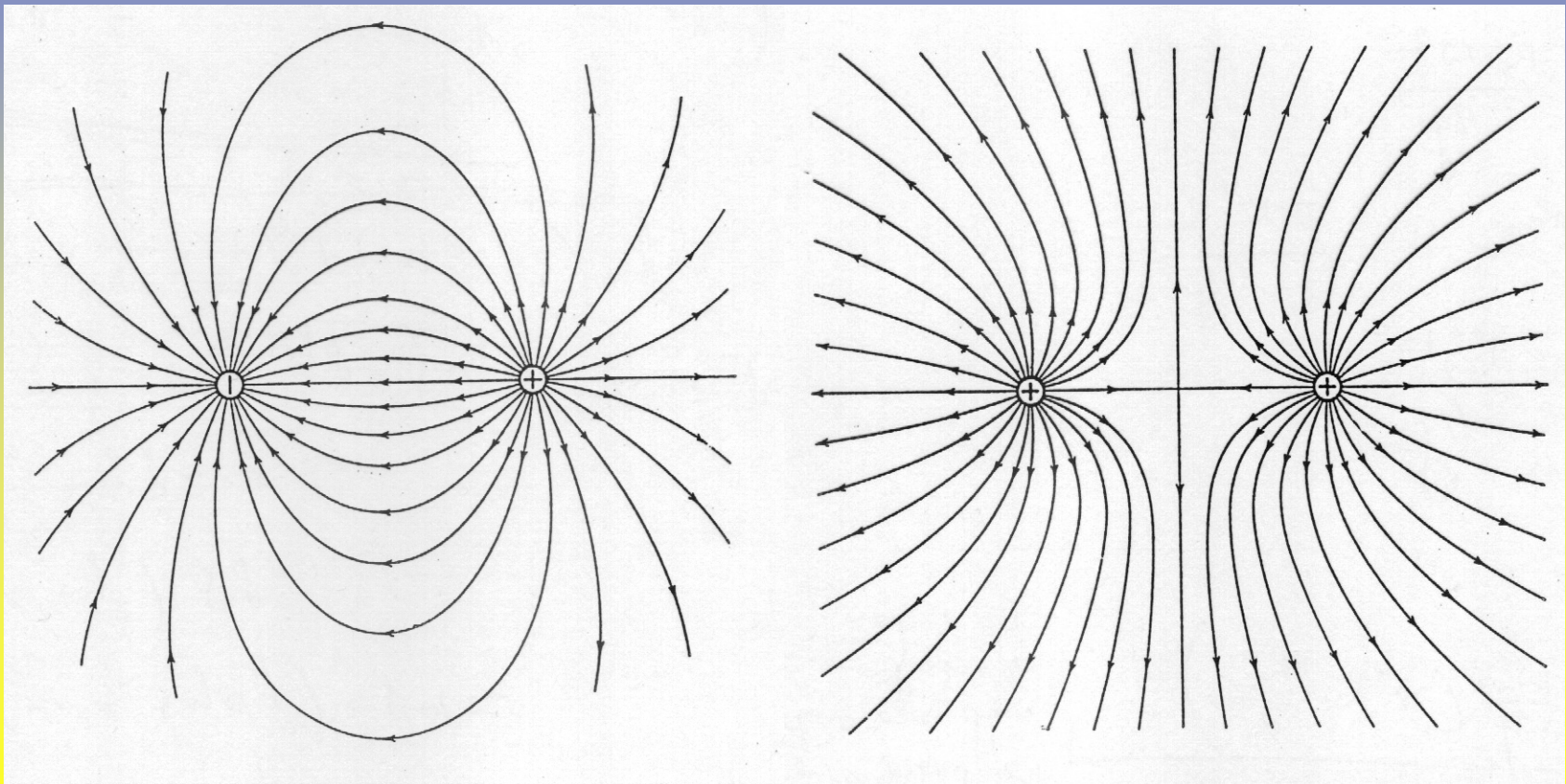


$$|\mathbf{E}| = E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

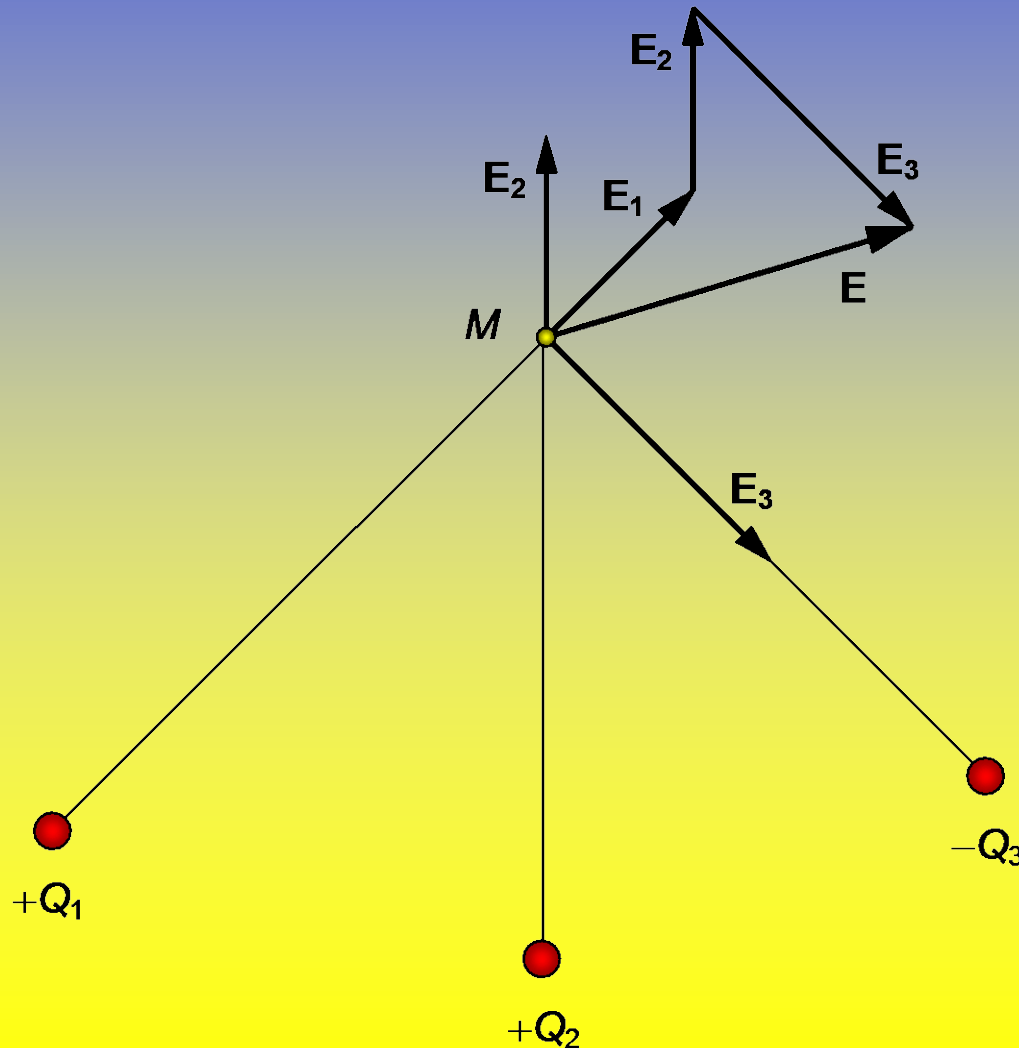
Natężenie pola elektrycznego



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Superpozycja pól elektrycznych



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Superpozycja pól elektrycznych

$$\mathbf{F} = \sum_{j=1}^m \frac{Q_j q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{nj}}{r_{nj}^3} = q \sum_{j=1}^m \frac{Q_j}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{nj}}{r_{nj}^3}$$

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^m \frac{Q_j}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_{nj}}{r_{nj}^3} = \sum_{j=1}^m \frac{Q_j}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \sum_{j=1}^m \mathbf{E}_j$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\sum_{j=1}^m Q_j \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \int_V q_v \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV + \int_S q_s \frac{\mathbf{r}}{r^3} dS + \int_l q_l \frac{\mathbf{r}}{r^3} dl \right]$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

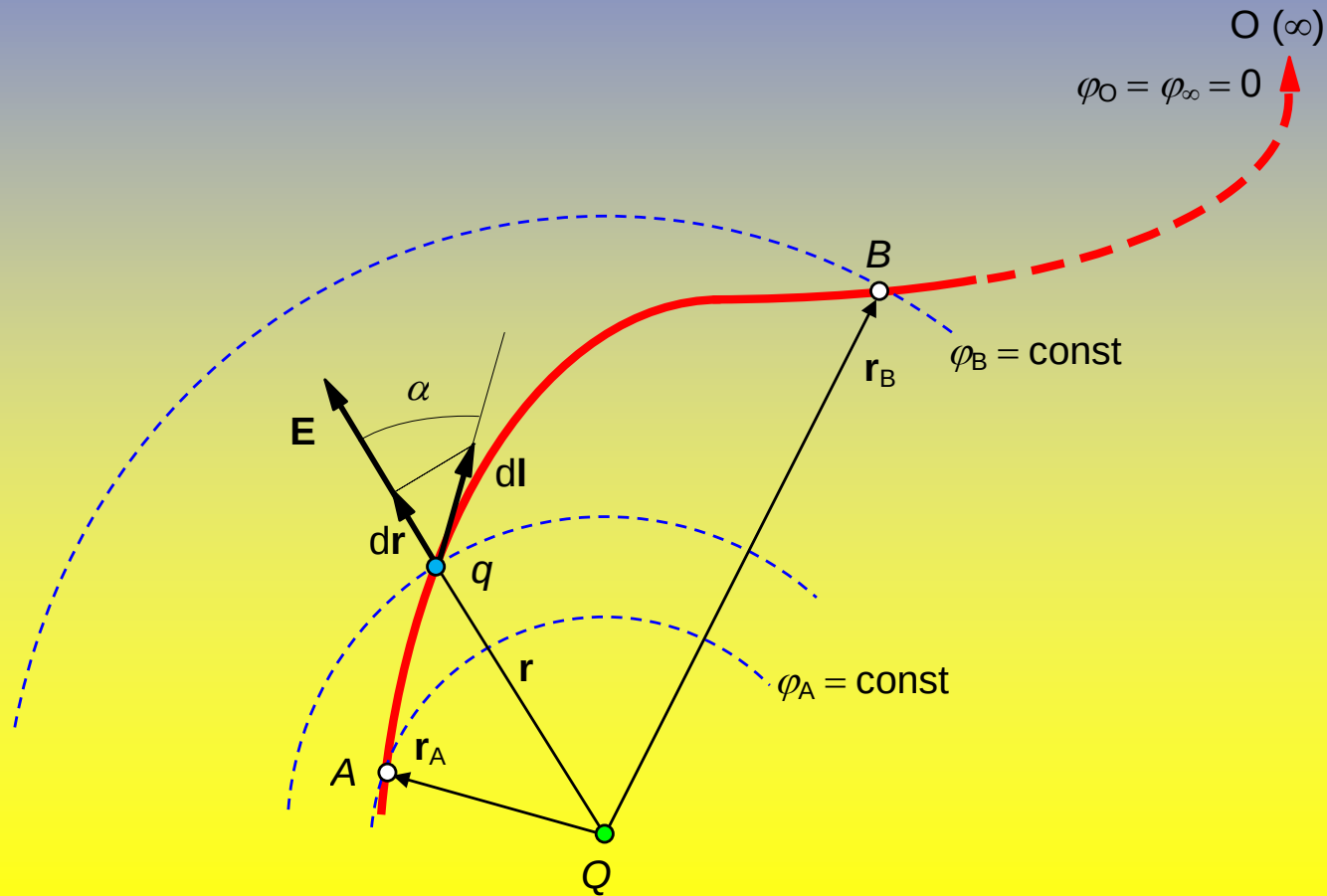
Superpozycja pól elektrycznych

Wniosek: Oddziaływania elektrostatyczne są *a d d y t y w n e*, co oznacza, że w środowisku liniowym ($\epsilon\epsilon_0 = \text{const}$) obowiązuje *z a s a d a s u p e r p o z y c j i*.

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praca w polu elektrycznym. Potencjalność pola elektrostatycznego



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praca w polu elektrycznym.

Potencjalność pola elektrostatycznego

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = qE dl \cos \alpha$$

Iloczyn skalarny

$$W_{AB} = \int_A^B q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \int_A^B E dl \cos \alpha$$

$$\frac{W_{AB}}{q} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B E dl \cos \alpha = U_{AB}$$

Napięcie elektryczne

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praca w polu elektrycznym.

Potencjalność pola elektrostatycznego

Dla $E = Q/(4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2)$ oraz $dl\cos\alpha = dr$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_B}$$

Wniosek: Napięcie nie zależy od drogi całkowania. Pole elektryczne jest potencjalne albo bezwrowe.

$$U_{AO} = \int_A^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_O^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \varphi(A)$$

Potencjał elektryczny

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praca w polu elektrycznym.

Potencjalność pola elektrostatycznego

Potencjał elektryczny w punkcie A

$$\varphi(A) = \int_A^{\infty} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

$$\varphi_A = \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_A}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praca w polu elektrycznym.

Potencjalność pola elektrostatycznego

$$\int_A^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_B^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$



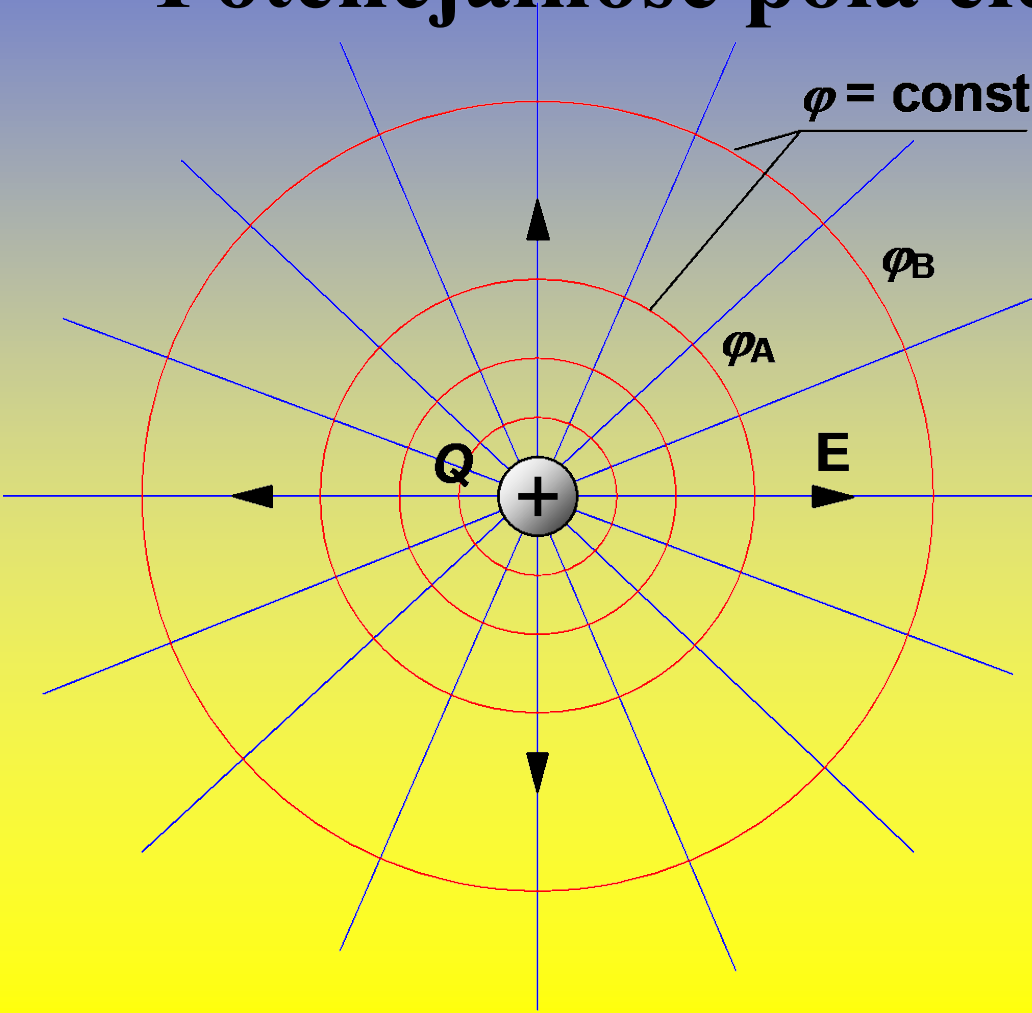
$$\varphi_A = U_{AB} + \varphi_B$$

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praca w polu elektrycznym. Potencjalność pola elektrostatycznego



Wnioski:

- W polu elektrycznym potencjalnym napięcie elektryczne między dwoma dowolnymi punktami jest równe różnicy ich potencjałów:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B.$$

- Powierzchnie w przestrzeni o stałej wartości potencjału [$\varphi = \varphi(x, y, z) = \text{const}$] nazywa się powierzchniami ekwipotencjalnymi.

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praca w polu elektrycznym.

Potencjalność pola elektrostatycznego

$$W_{AA} = \int_A^A q \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = q \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$



$$\mathbf{E} = 0$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praca w polu elektrycznym.

Potencjalność pola elektrostatycznego

Z twierdzenia *Stokesa* wynika, że

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{rot} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$



$$\text{rot} \mathbf{E} = 0$$

Pole elektryczne bezwirowe

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praca w polu elektrycznym.

Potencjalność pola elektrostatycznego

Z potencjalności i bezwirowości pola elektrycznego wynika, że

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\text{grad}\varphi(\mathbf{r})$$

ponieważ zawsze

$$\text{rot}[-\text{grad}\varphi(\mathbf{r}) + \text{const}] = \text{rot}[-\text{grad}\varphi(\mathbf{r})] = 0$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Superpozycja potencjałów elektrycznych

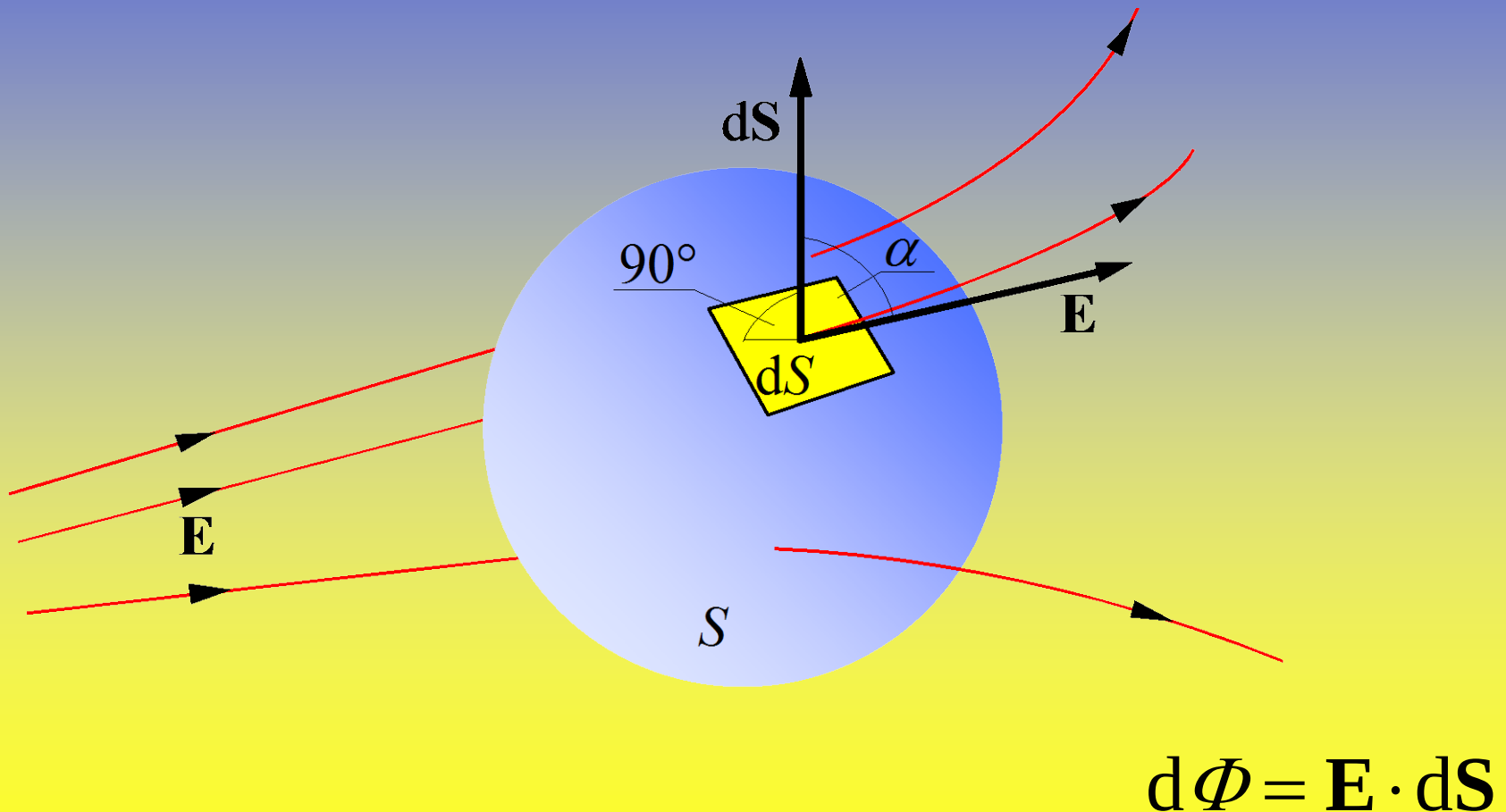
$$\varphi(A) = \int_A^O \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^O \left(\sum_{j=1}^m \mathbf{E}_j \right) \cdot d\mathbf{l} = \sum_{j=1}^m \int_A^O \mathbf{E}_j \cdot d\mathbf{l} = \sum_{j=1}^m \varphi_j(A)$$

$$\varphi(A) = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\sum_{j=1}^m \frac{Q_j}{r} + \int_V \frac{q_v}{r} dV + \int_S \frac{q_s}{r} dS + \int_l \frac{q_l}{r} dl \right]$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Prawo *Gaussa*



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Prawo *Gaussa*

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E dS \cos \alpha$$

Dla $E = Q/(4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2)$ oraz $dS \cos \alpha = d\omega r^2$

$$\Phi = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \int_{\omega} d\omega = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0} \frac{\omega}{4\pi}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Prawo *Gaussa*

Dla $\omega = 4\pi$

$$\Phi = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}$$

$$\oint_S \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

$$\mathbf{D} = \epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}$$



Indukcja elektryczna

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Prawo *Gaussa* Źródłowość pola elektrycznego

Z prawa *Gaussa-Ostrogradskiego* wynika, że

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV$$

Jeśli istnieje $Q = \int_V q_v dV$, to

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \int_V q_v dV$$



$$\operatorname{div} \mathbf{D} = q_v$$

Źródło
pola elektrycznego

Pole elektryczne źródłowe

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Prawo *Gaussa* **Równania *Poissona* i *Laplace'a***

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{q_v}{\varepsilon \varepsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi$$



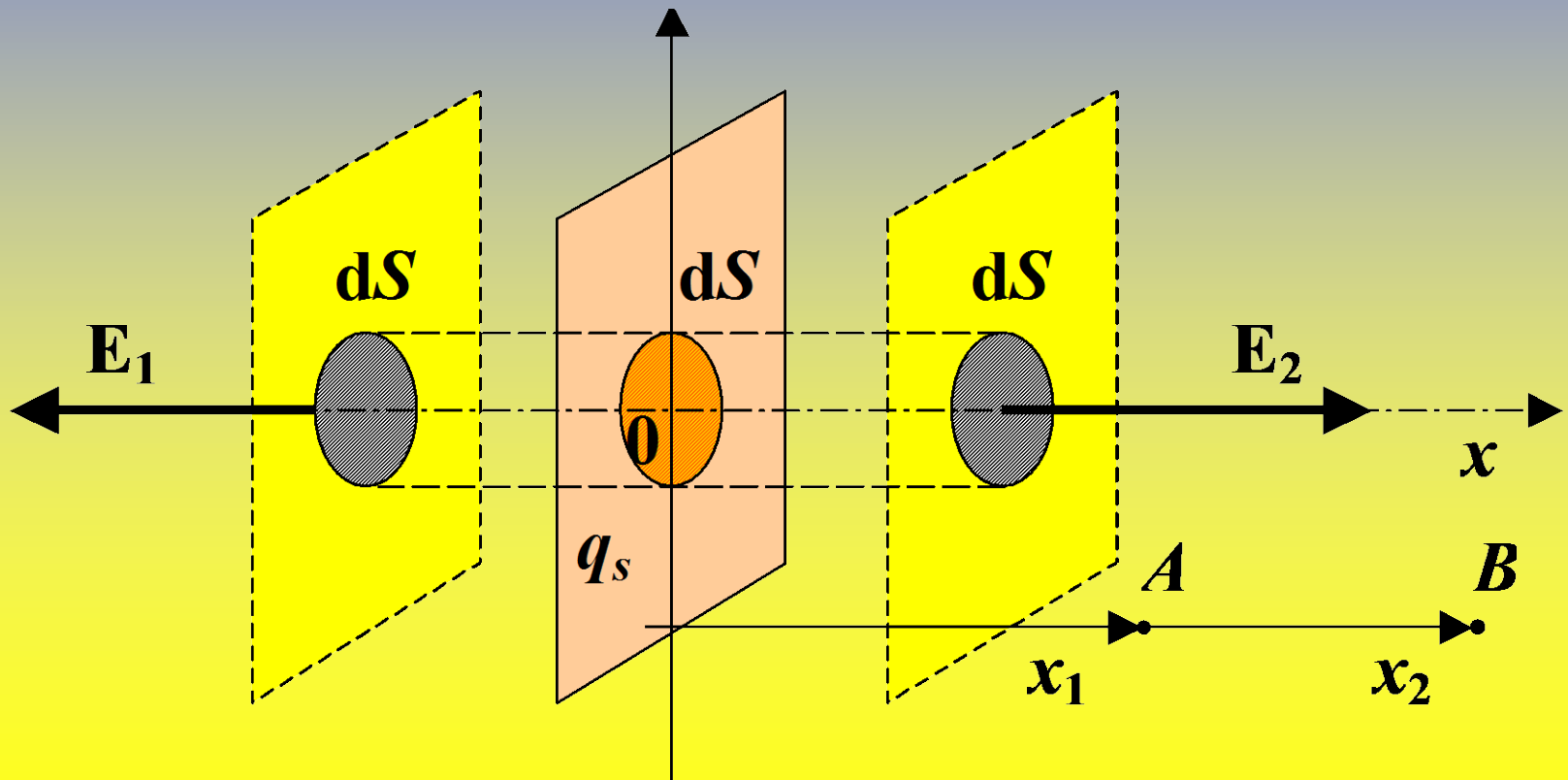
$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla^2 \varphi = -\frac{q_v}{\varepsilon \varepsilon_0} \longrightarrow \text{równanie } \mathbf{Poissona}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0 \longrightarrow \text{równanie } \mathbf{Laplace'a}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne nieskończenie wielkiej płaszczyzny z równomiernie rozłożonym na niej ładunkiem powierzchniowym



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne nieskończenie wielkiej...

$$\mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_2 \quad \text{oraz} \quad E_1 = E_2 = E$$

Strumień indukcji elektrycznej Φ , gdzie indukcja elektryczna $D = \epsilon\epsilon_0 E$, przez powierzchnię zamkniętą walca jest równy ładunkowi $q_s dS$ obejmowanemu przez tę powierzchnię. Strumień przez boczną walca jest równy zeru, ponieważ $E = E_n = 0$. Zatem istnieją **tylko** dwa strumienie przez obie podstawy walca.

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne nieskończenie wielkiej...

$$d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = E_1 dS + E_2 dS = 2E dS = \frac{dQ}{\epsilon\epsilon_0}$$

lub

$$2\epsilon\epsilon_0 E dS = 2D dS \quad \text{ i } \quad dQ = q_s dS \quad \Rightarrow \quad 2\epsilon\epsilon_0 E dS = 2D dS = q_s dS$$

$$E = \frac{q_s}{2\epsilon\epsilon_0} \quad \text{ oraz } \quad D = \frac{q_s}{2}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Potencjał w polu naładowanej nieskończenie wielkiej płaszczyzny

$$E = -\text{grad}\varphi = -\frac{d\varphi}{dx} \Rightarrow \varphi = -\int E dx$$

$$\varphi = -\int \frac{q_s}{2\varepsilon\varepsilon_0} dx$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{x_2}^{x_1} E dr = \int_{x_1}^{x_2} \frac{q_s}{2\varepsilon\varepsilon_0} dx = \frac{q_s}{2\varepsilon\varepsilon_0} x \Big|_{x_1}^{x_2} =$$

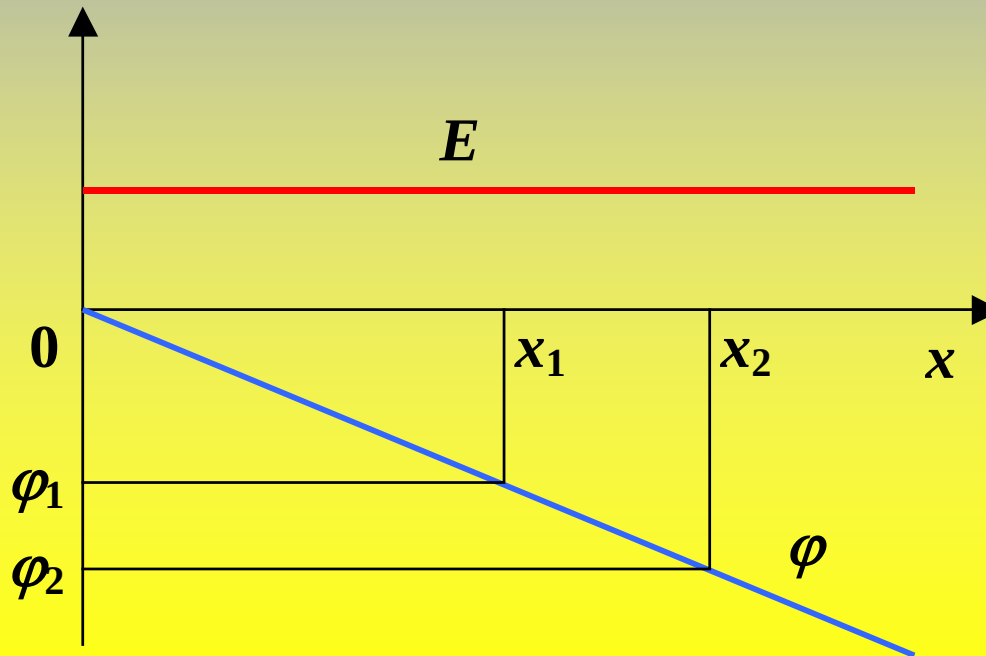
$$= \frac{q_s}{2\varepsilon\varepsilon_0} (x_2 - x_1)$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Rozkłady natężenia pola i potencjału w polu naładowanej nieskończenie wielkiej...

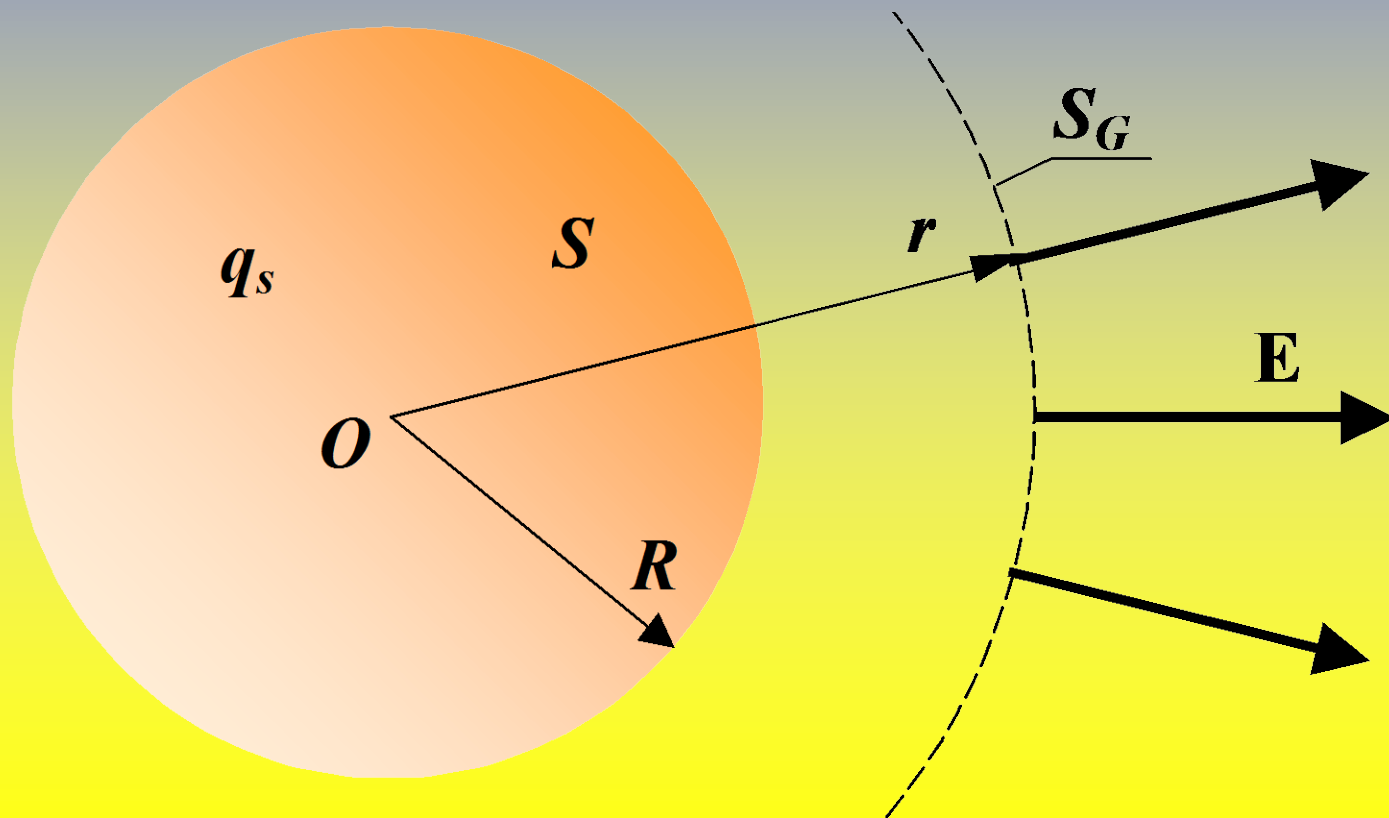
Wobec warunku: $x_2 > x_1$ jest $\varphi_1 > \varphi_2$, czyli potencjał maleje wraz z odległością od naładowanej nieskończenie wielkiej płaszczyzny.



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

**Pole elektryczne na zewnątrz kuli
z równomiernie rozłożonym na jej
powierzchni ładunkiem powierzchniowym**



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne na zewnątrz kuli z równomiernie rozłożonym...

$$q_s = \frac{Q}{S}; \quad S = 4\pi R^2; \quad S_G = 4\pi r^2 \text{ – powierzchnia Gaussa}$$

Wobec $E = \text{const}$ jest

$$\Phi = \oint_{S_G} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \oint_{S_G} E dS = E \int_0^{S_G} dS = ES_G = E \cdot 4\pi r^2$$

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}, \quad \text{ponieważ} \quad E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon\epsilon_0}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne na zewnątrz kuli z równomiernie rozłożonym...

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q_s S}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q_s 4\pi R^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q_s}{\epsilon\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}$$

Dla $r = R$

$$E = \frac{q_s}{\epsilon\epsilon_0}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne na zewnątrz kuli z równomiernie rozłożonym...

Dla $E = 0$ oraz $\varphi(r) = \text{const}$ dla $r \leq R$

$$E = -\text{grad}\varphi = -\frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{R} = \text{const}$$

Zewnątrz kuli: $r \geq R$, $S \neq S_G(r)$ i $S = 4\pi R^2$ oraz powierzchnia Gaussa $S_G(r) > S = 4\pi R^2$ obejmuje całą kulę z ładunkiem

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q_s S}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q_s 4\pi R^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r^2} = \frac{q_s}{\epsilon\epsilon_0} \frac{R^2}{r^2}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Potencjał na zewnątrz kuli z równomiernie rozłożonym na jej powierzchni...

$$\varphi = -\int E dr = -\int \frac{q_s}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2} dr = -\frac{q_s}{\varepsilon \varepsilon_0} R^2 \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{q_s}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{R^2}{r} + C$$

Ponieważ dla $r = \infty$ $\varphi = 0$, zatem $C = 0$, bo $0 = 0 + C$

$$\varphi = \frac{q_s}{\varepsilon \varepsilon_0} \frac{R^2}{r} = \frac{Q}{4\pi \varepsilon \varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Potencjał na zewnątrz kuli z równomiernie rozłożonym na jej powierzchni...

To samo, ale inaczej

$$\begin{aligned}\varphi_r - \varphi_\infty &= - \int_{\infty}^r E dr = - \int_{\infty}^r \frac{q_s}{\epsilon \epsilon_0} \frac{R^2}{r^2} dr = - \frac{q_s}{\epsilon \epsilon_0} R^2 \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = \\ &= - \frac{q_s}{\epsilon \epsilon_0} R^2 \left(- \frac{1}{r} \right) \Big|_{\infty}^r = \frac{q_s}{\epsilon \epsilon_0} R^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{q_s}{\epsilon \epsilon_0} \frac{R^2}{r} = \frac{Q}{4\pi \epsilon \epsilon_0} \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Ponieważ potencjał w nieskończoności: $\varphi_\infty = 0$ oraz $\varphi_r = \varphi$, zatem

$$\varphi = \frac{q_s}{\epsilon \epsilon_0} \frac{R^2}{r}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Potencjał na zewnątrz kuli z równomiernie rozłożonym na jej powierzchni...

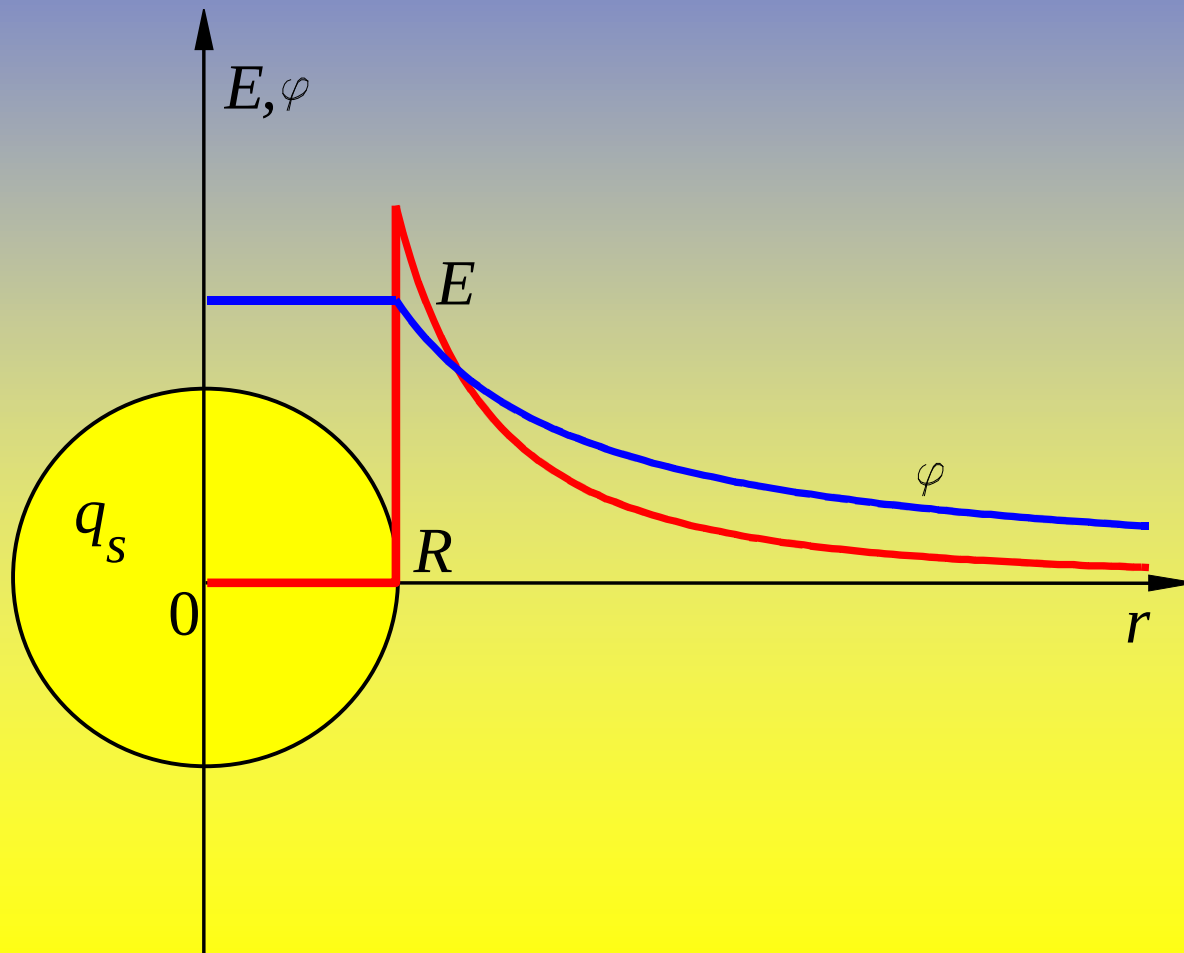
Dla $r = R$

$$\varphi = \frac{q_s}{\varepsilon\varepsilon_0} \frac{R^2}{R} = \frac{q_s}{\varepsilon\varepsilon_0} R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

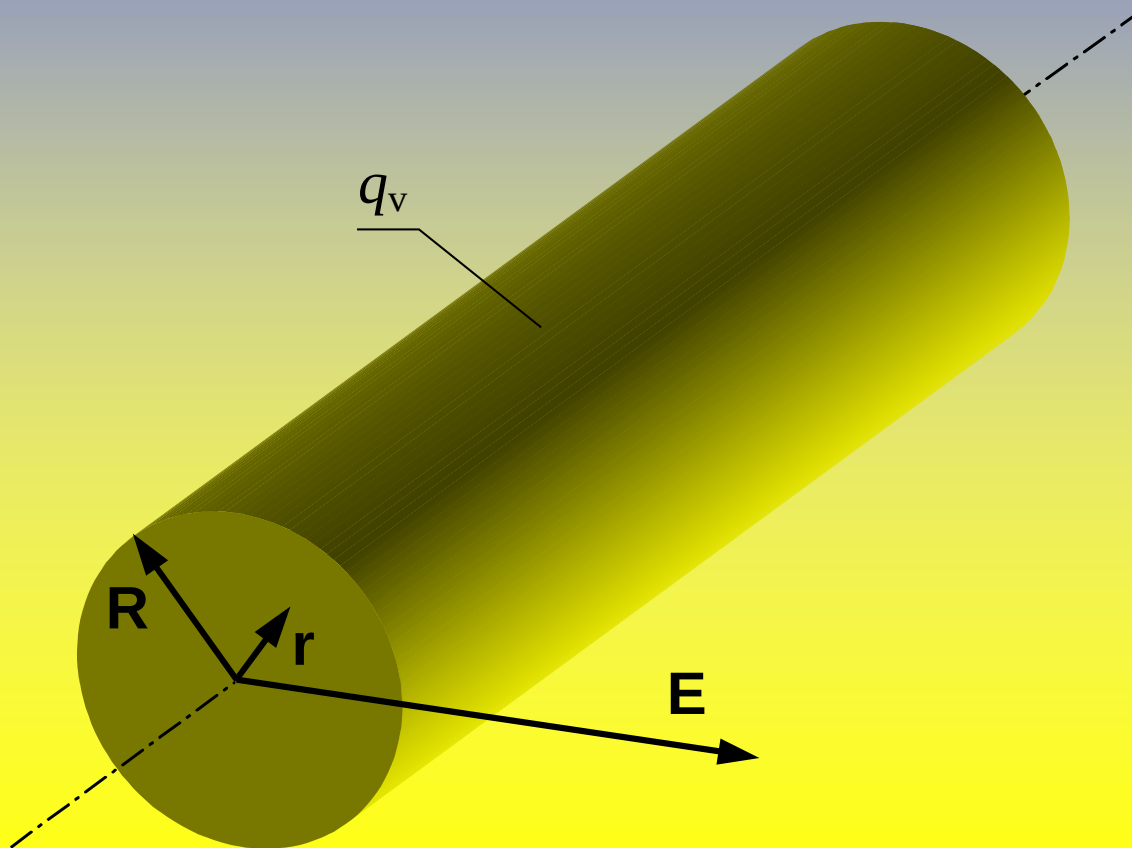
Rozkłady natężenia pola i potencjału w polu naładowanej kuli...



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne nieskończenie długiego walca z równomiernie rozłożonym w nim ładunkiem objętościowym



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne nieskończenie długiego walca z równomiernie rozłożonym...

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right)$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne nieskończenie długiego walca z równomiernie rozłożonym...

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_1}{dr} \right) = -\frac{q_v}{\varepsilon \varepsilon_0} & 0 < r \leq R \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = 0 & r > R \end{array} \right.$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne nieskończenie długiego walca z równomiernie rozłożonym...

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = -\frac{q_v}{\varepsilon\varepsilon_0} r^2 + A_1 \ln r + B_1 \\ \varphi_2 = A_2 \ln r + B_2 \end{array} \right.$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pole elektryczne nieskończenie długiego walca z równomiernie rozłożonym...

Warunki brzegowe:

$$1. \quad r = 0 \Rightarrow \ln r \rightarrow -\infty \quad A_1 = 0 \quad i \quad \varphi_1(0) = 0 \Rightarrow B_1 = 0$$

$$2. \quad r = R \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2 \ln R + B_2 = -\frac{q_v}{4\epsilon\epsilon_0} R^2 \\ \frac{A_2}{R} = -\frac{q_v}{2\epsilon\epsilon_0} R \end{array} \right.$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Potencjał nieskończenie długiego walca z równomiernie rozłożonym...

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi_1(r) = -\frac{q_v}{4\epsilon\epsilon_0} r^2 & 0 < r \leq R \\ \varphi_2(r) = \frac{q_v}{2\epsilon\epsilon_0} R^2 \ln \frac{R}{r} - \frac{q_v}{4\epsilon\epsilon_0} R^2 & r > R \end{array} \right.$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

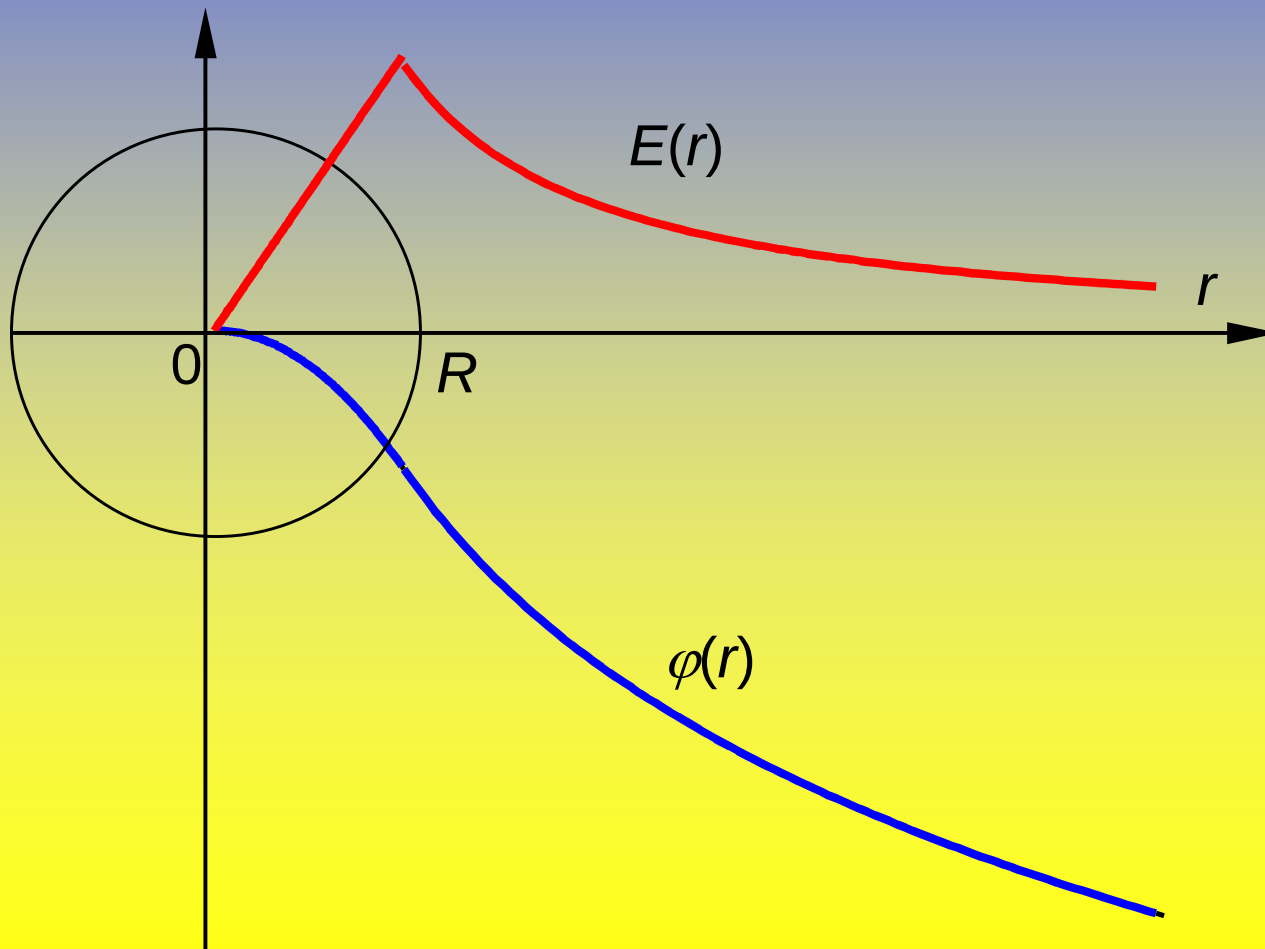
Natężenie pola nieskończenie długiego walca z równomiernie rozłożonym...

$$\left\{ \begin{array}{ll} E_1(r) = -\frac{d\varphi_1}{dr} = \frac{q_v}{2\varepsilon\varepsilon_0} r & 0 < r \leq R \\ E_2(r) = -\frac{d\varphi_2}{dr} = \frac{q_v}{2\varepsilon\varepsilon_0} \frac{R^2}{r} & r > R \end{array} \right.$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Rozkłady natężenie pola i potencjału nieskończenie długiego walca...



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Elektryzacja albo elektryzowanie

Procesy r o z d z i e l a n i a (p r z e g r u p o w a n i a) ładunków w przewodniku przy wnoszeniu przewodnika w zewnętrzne pole elektr(ostat)yczne występują na skutek istnienia zjawiska i n d u k c j i e l e k t r o s t a t y c z n e j. Jest to jedna z form *elektryzowania* ciał, czyli powodowania, że posiadają one nadmiarowy ładunek d o d a t n i albo u j e m n y.

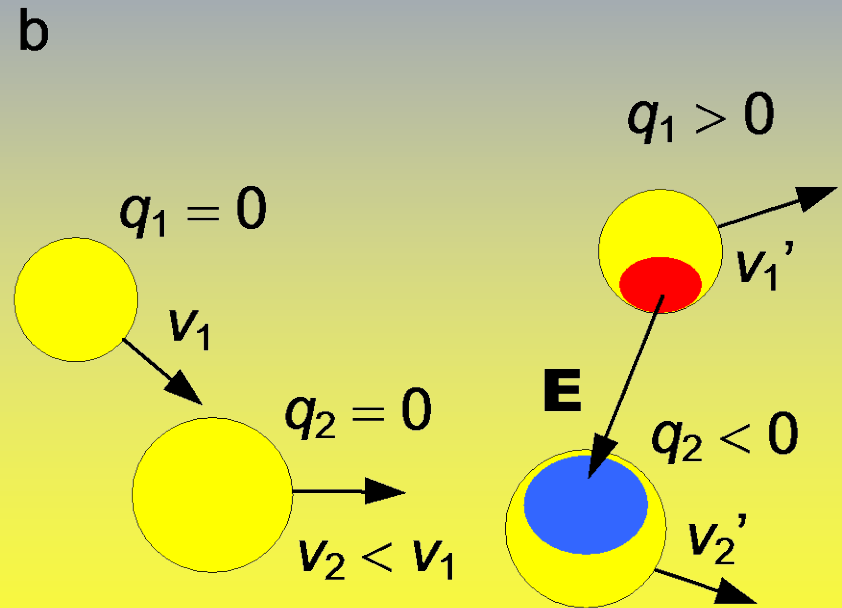
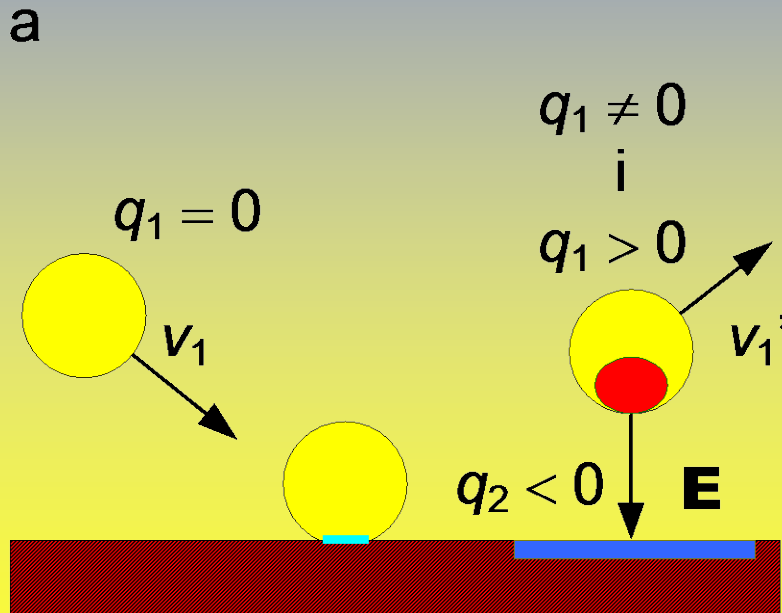
E l e k t r y z a c j a albo e l e k t r y z o w a n i e (się) jest to ogólnie nabywanie n a d m i a r o w e g o dodatniego lub ujemnego ładunku elektrycznego przez ciała elektrycznie o b o j ę t n e albo już posiadające pewien n a d m i a r o w y dodatni lub ujemny ładunek elektryczny.

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Elektryzacja albo elektryzowanie

Kontakt i separacja dynamiczna
tarcie — tryboelektryzacja



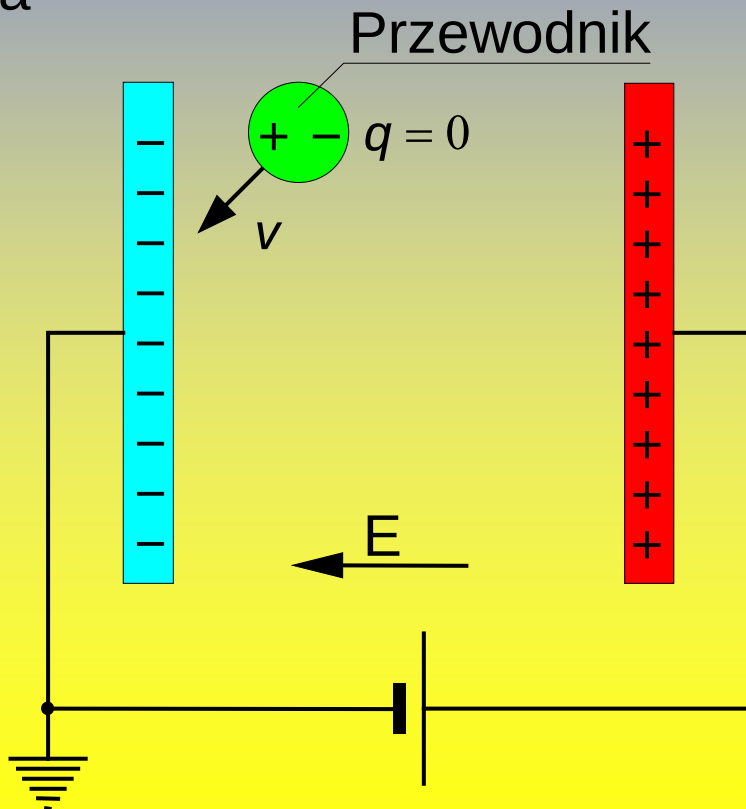
Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

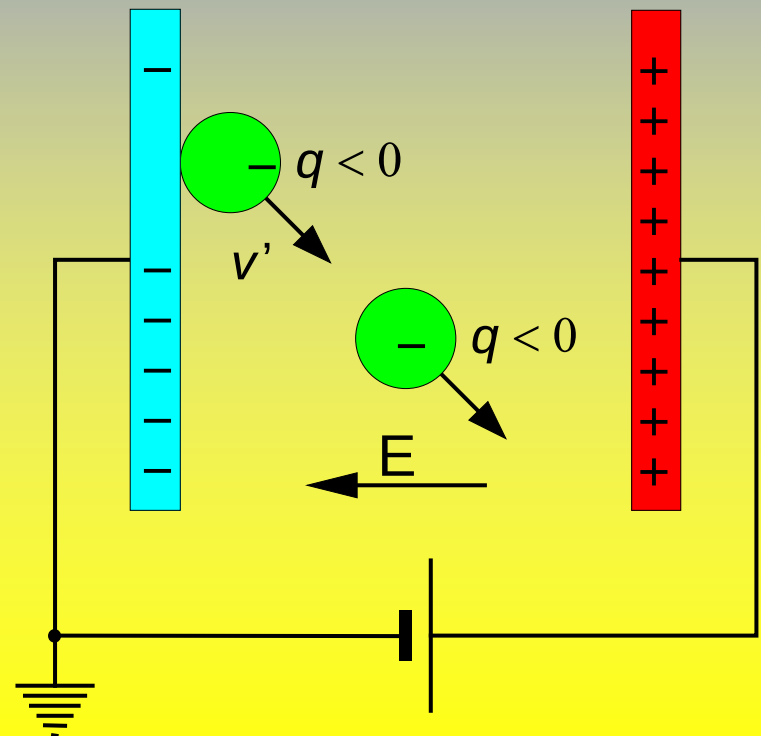
Elektryzacja albo elektryzowanie

Elektryzacja przez indukcję

a



b

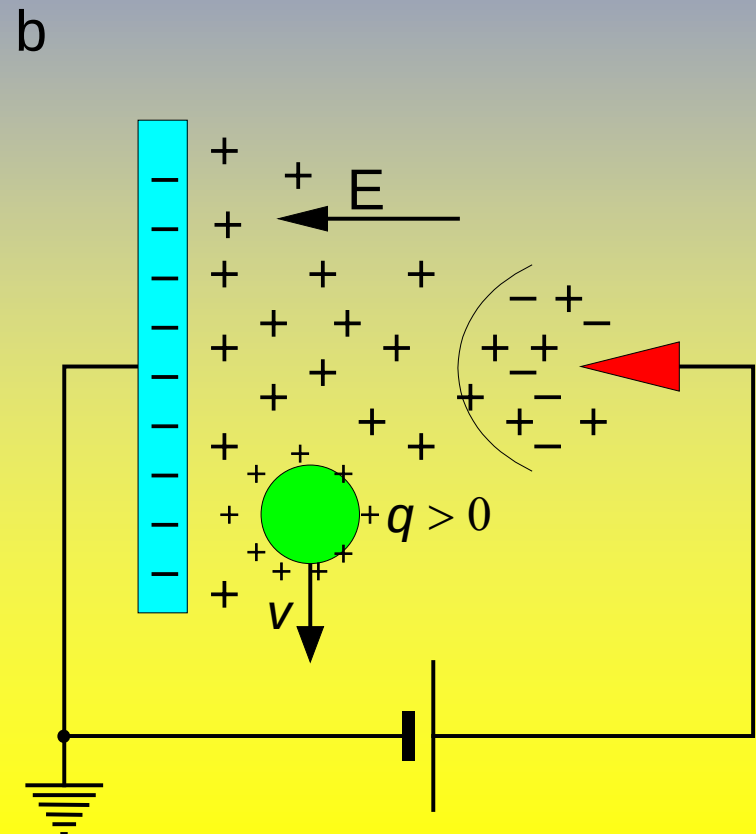
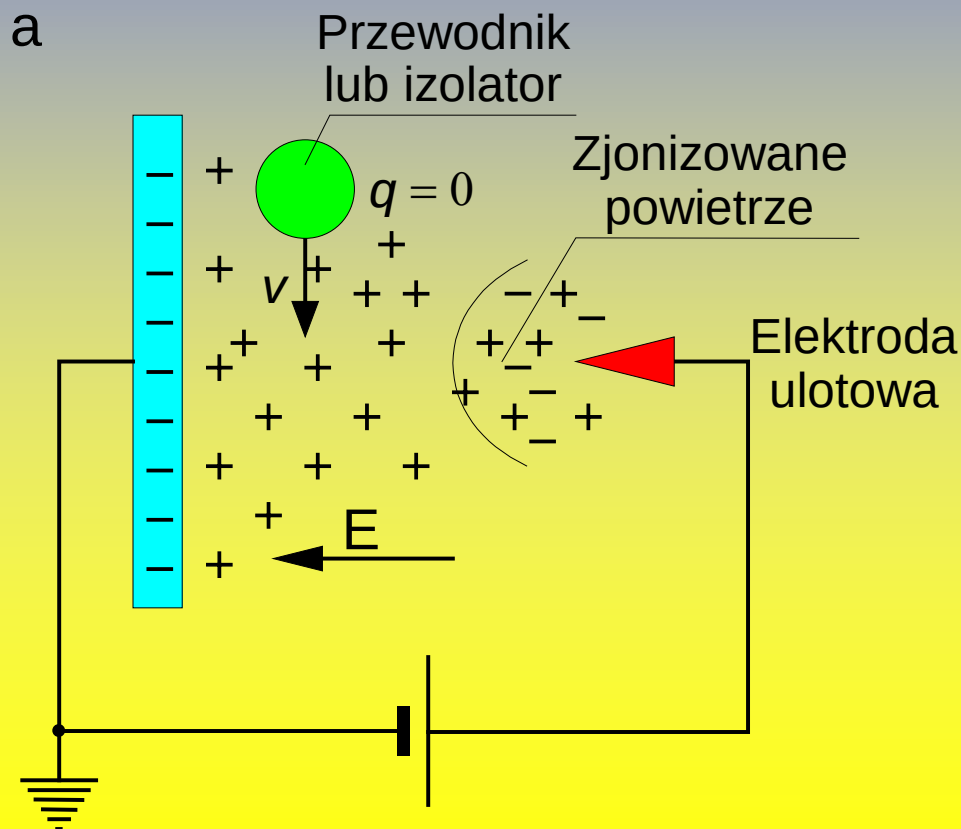


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Elektryzacja albo elektryzowanie

Elektryzacja w polu wyładowania ulotowego

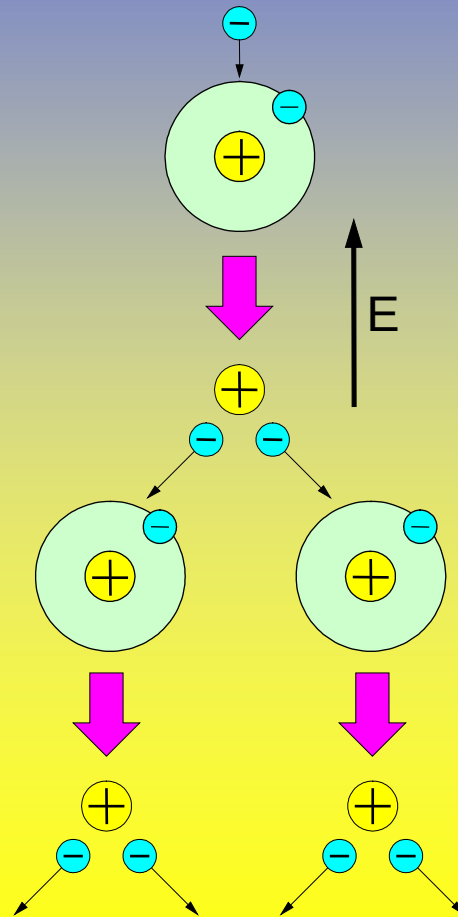


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Elektryzacja albo elektryzowanie

Mechanizm lawin elektronowych



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

Warunki powstawania wyładowań piorunowych:

- Silnie naelektryzowana chmura burzowa.
- Erupcja wulkanu.
- Wybuch jądrowy na powierzchni ziemi (do 2 km) lub w atmosferze (od 2 km do 20 km).
- Burza śnieżna.
- Burza piaskowa.
- Deszcz i lód, ale nie podczas burzy z piorunami.
- „Grom z jasnego nieba” — przy czystym błękitnym niebie.

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

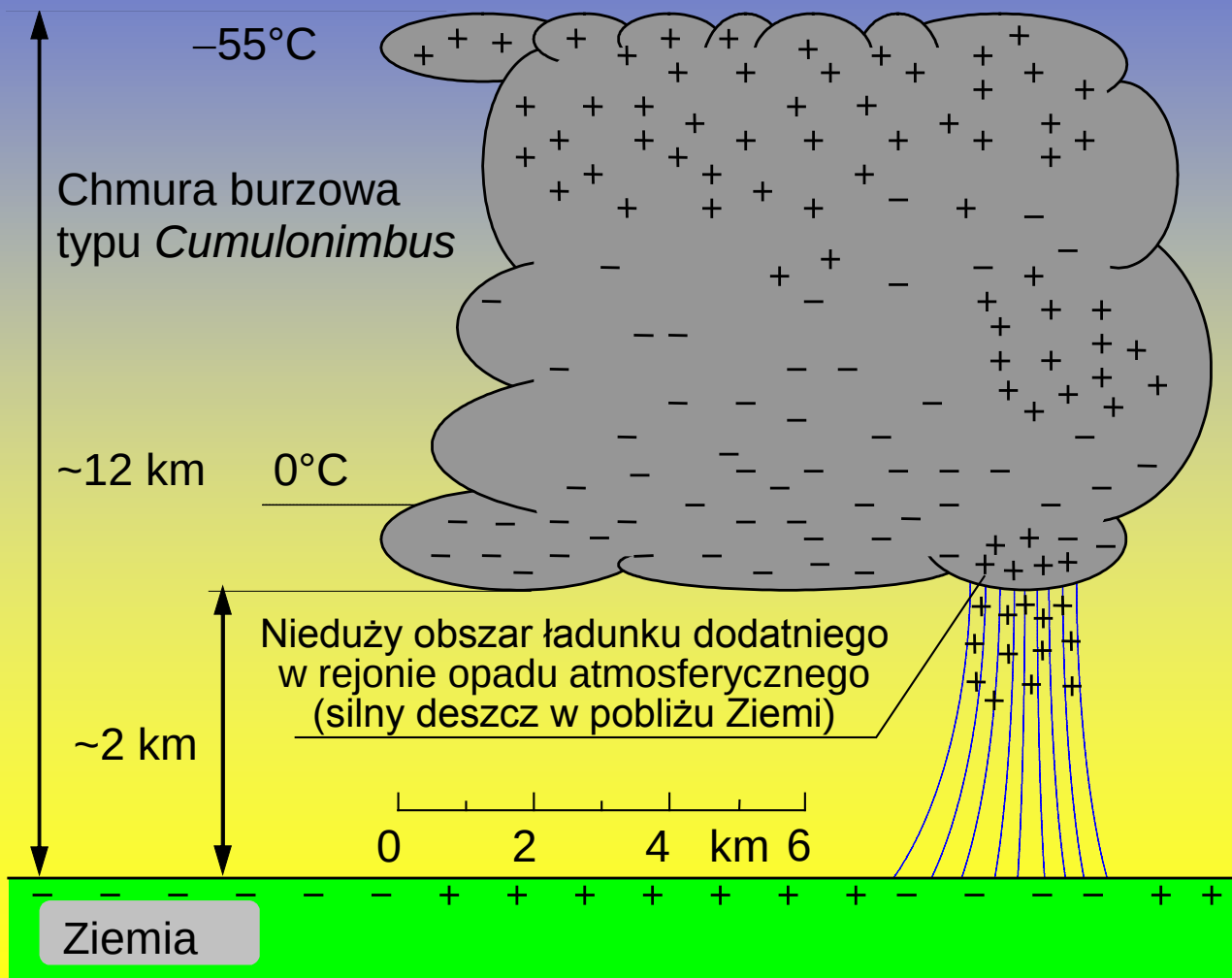
Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

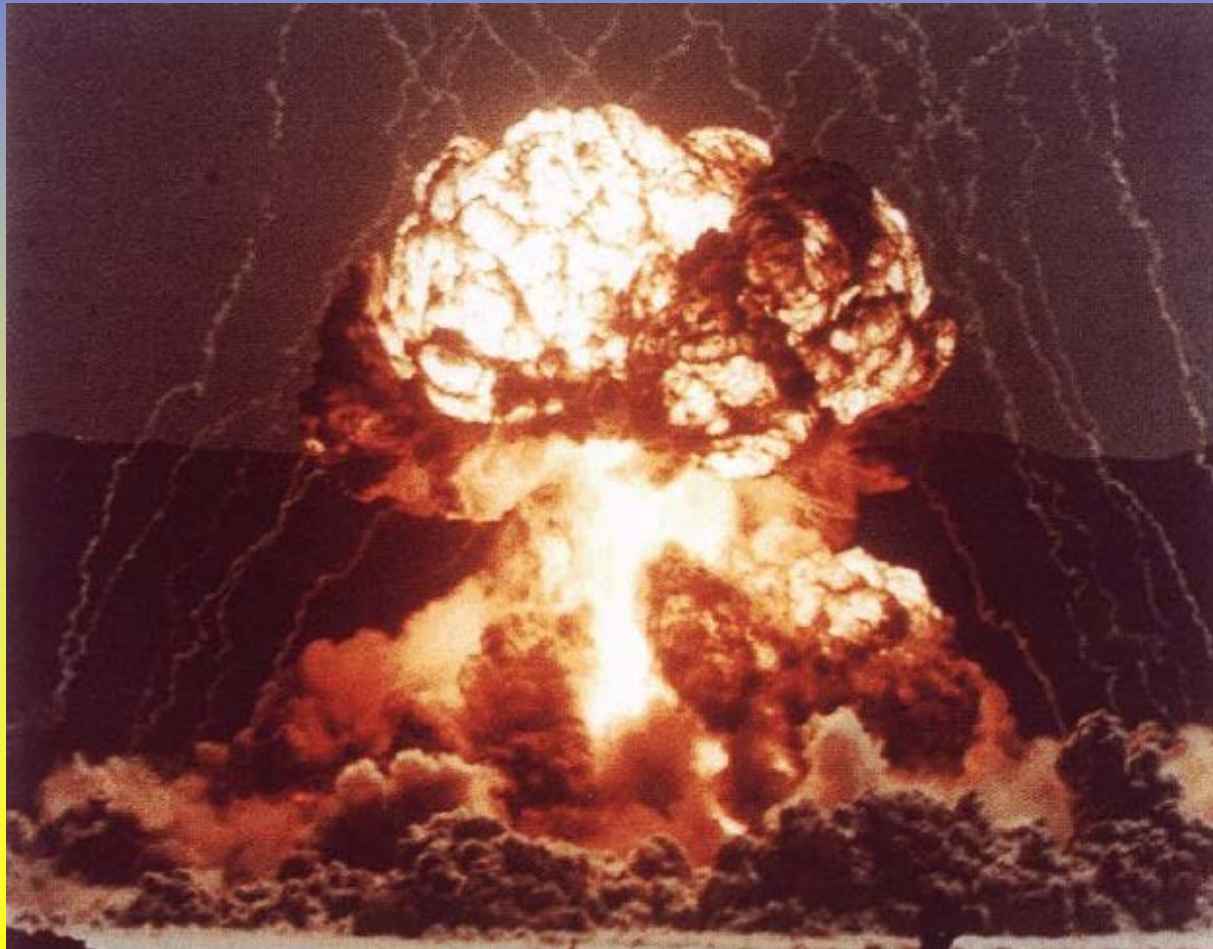
Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

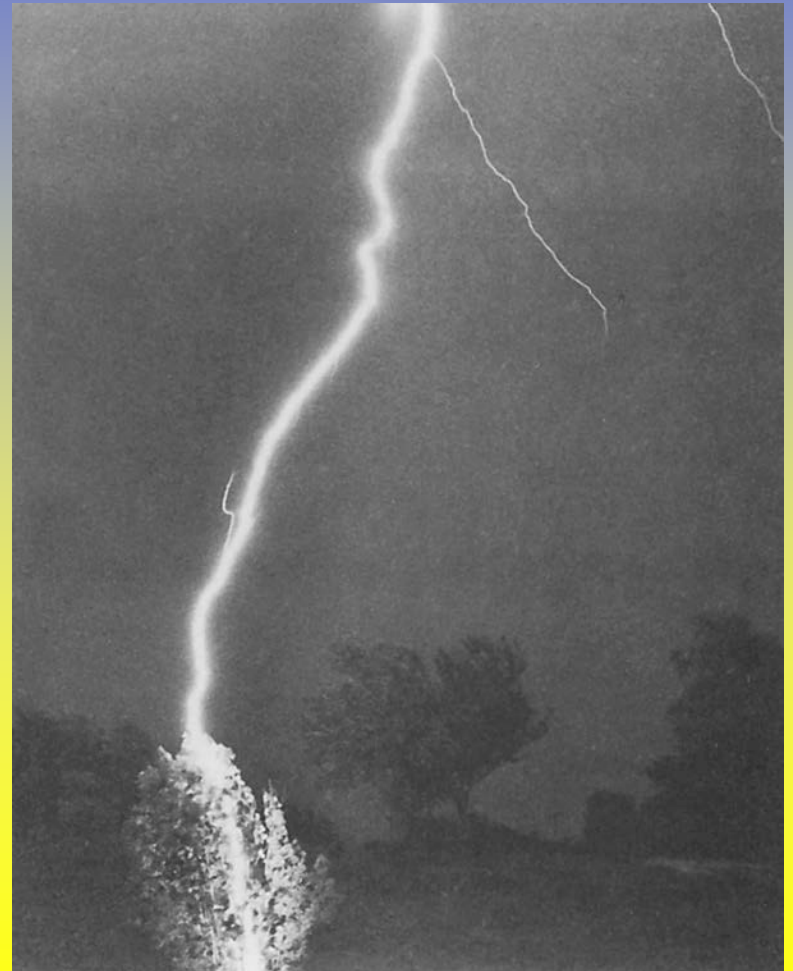
Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

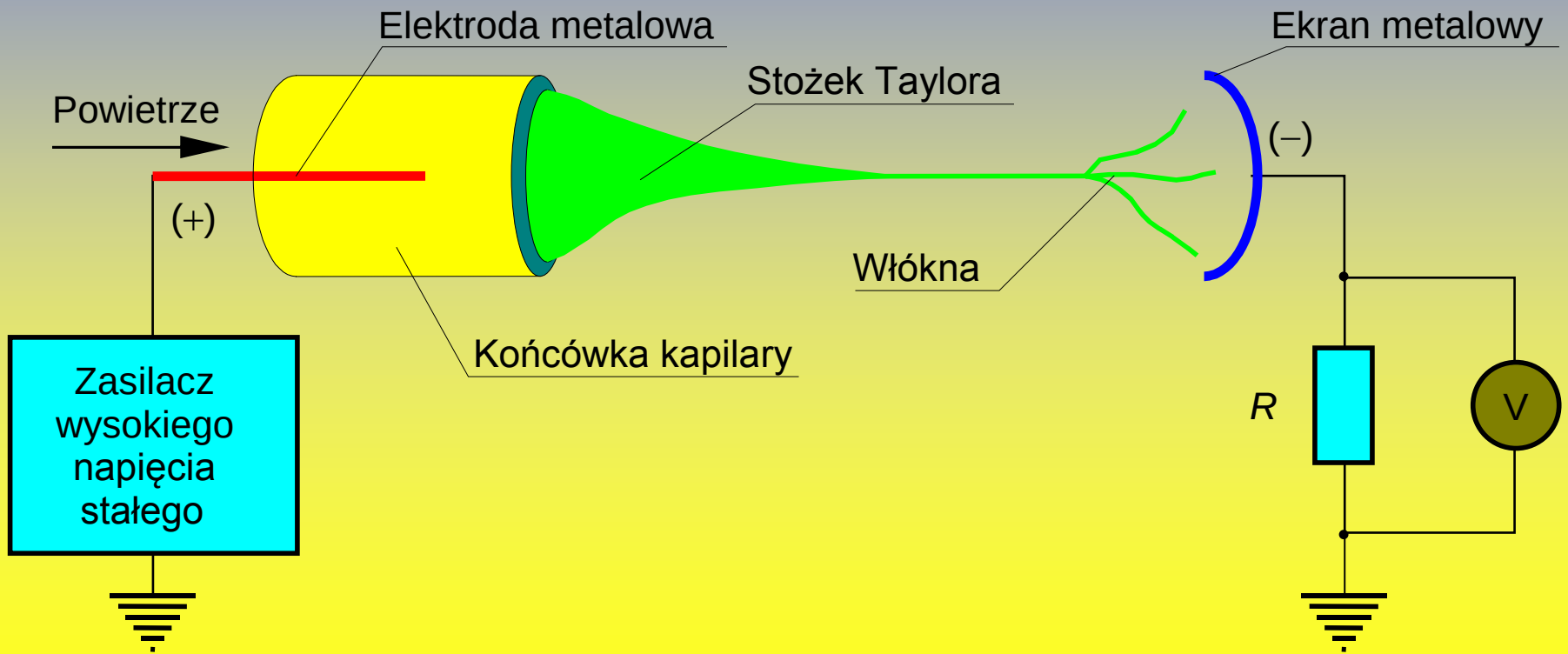


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

Elektrospinning — wytwarzanie włókien

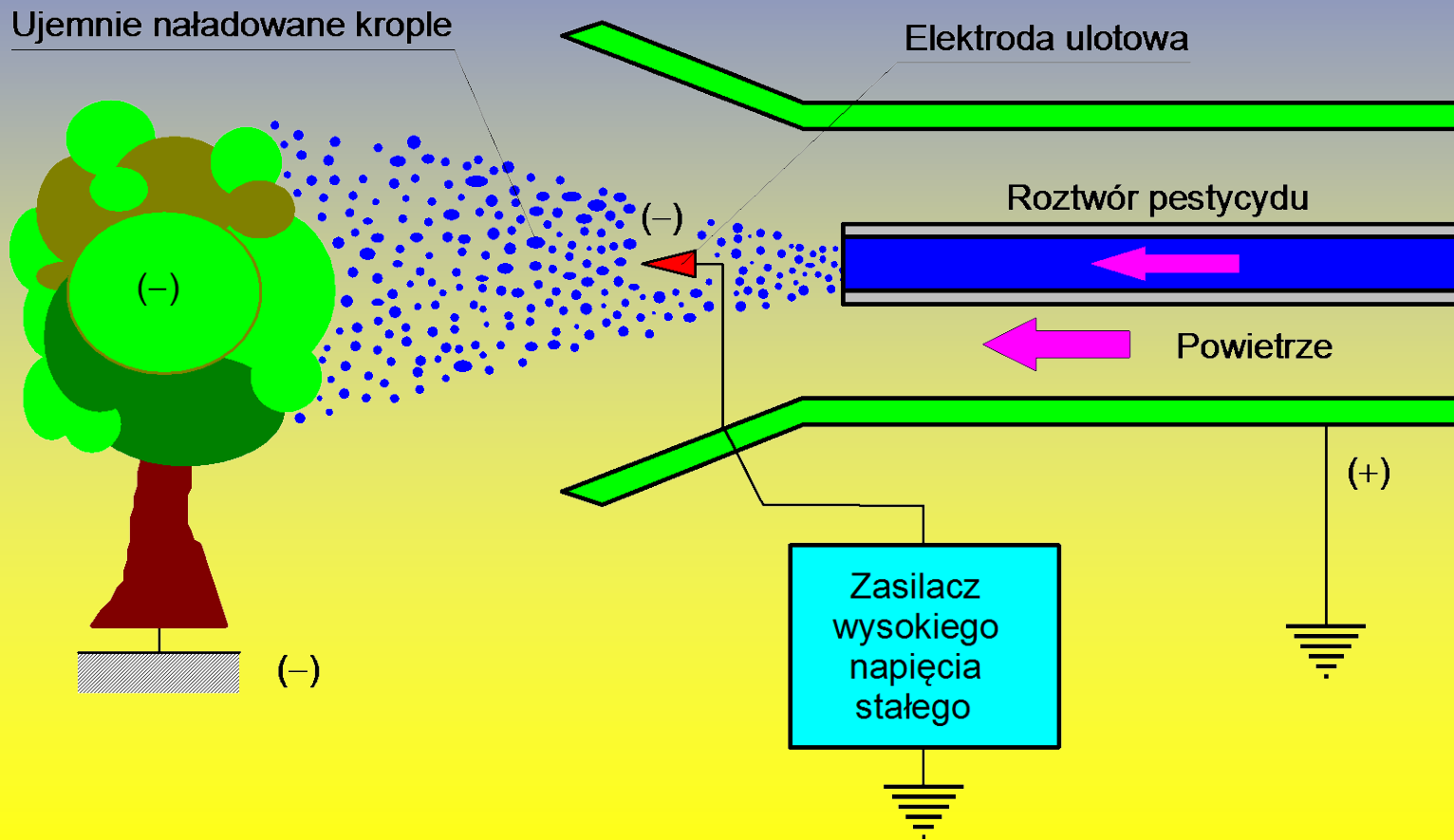


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

Opryskiwanie roślin

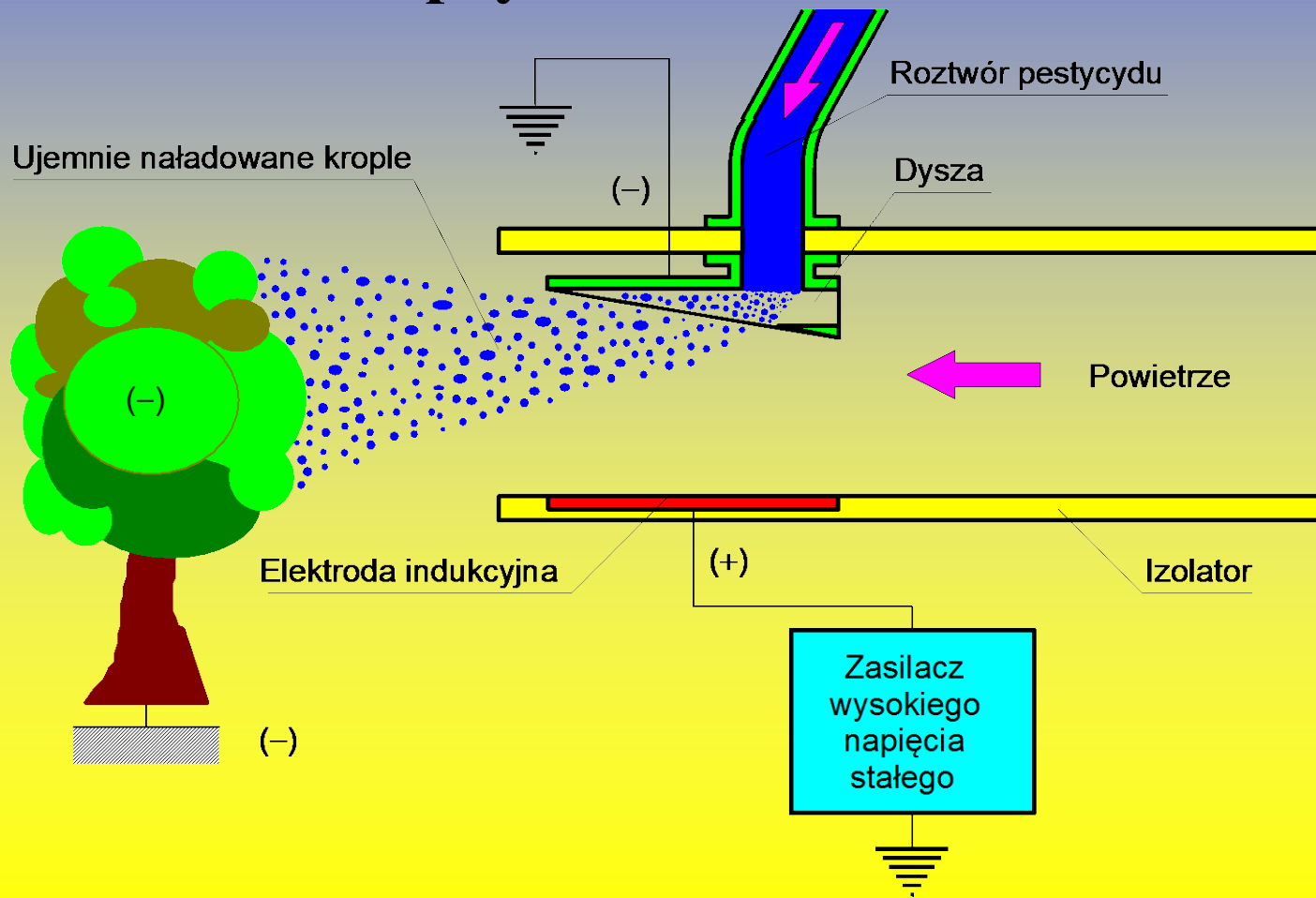


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

Opryskiwanie roślin

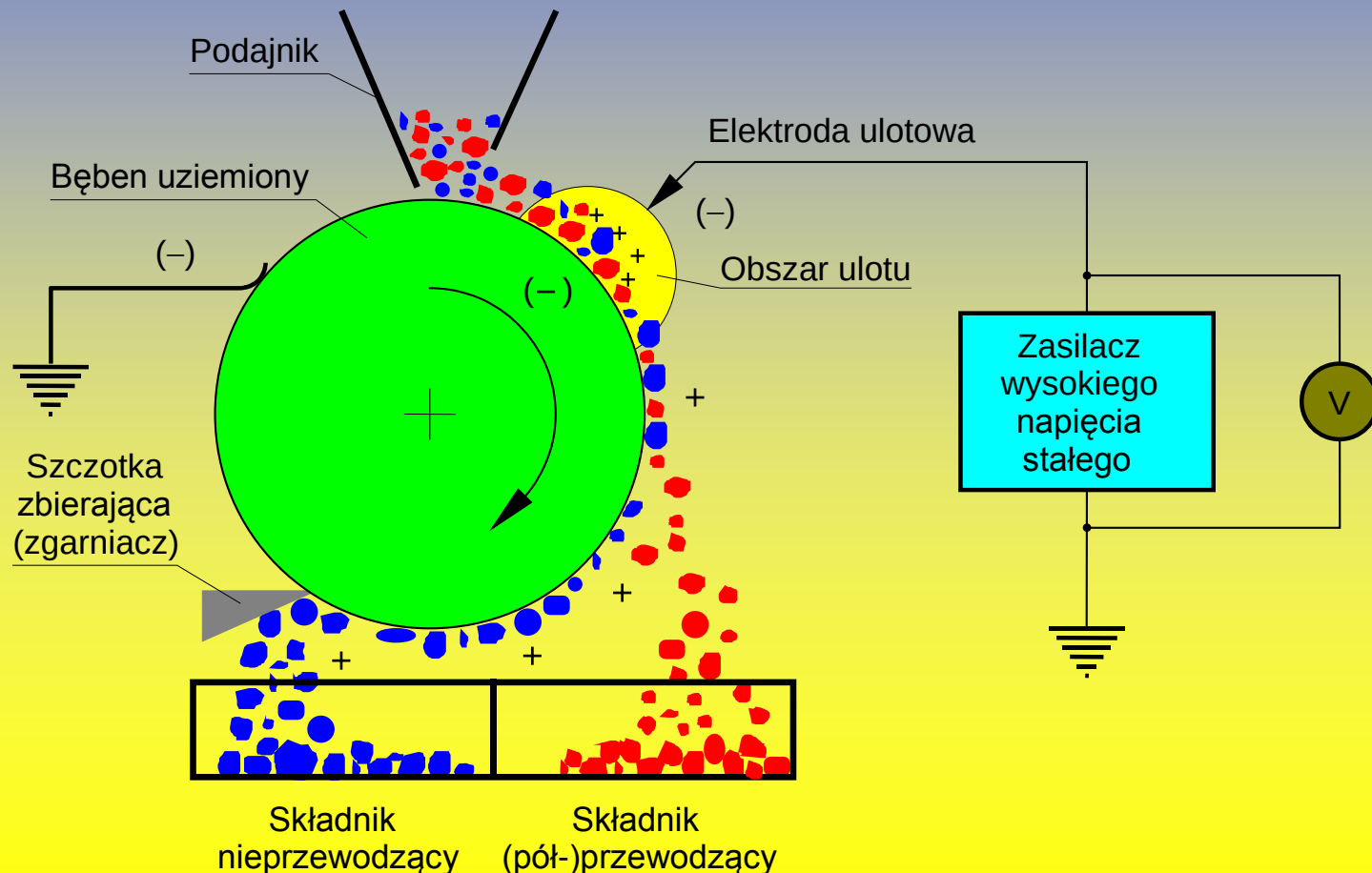


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

Elektroseparacja — wzbogacanie

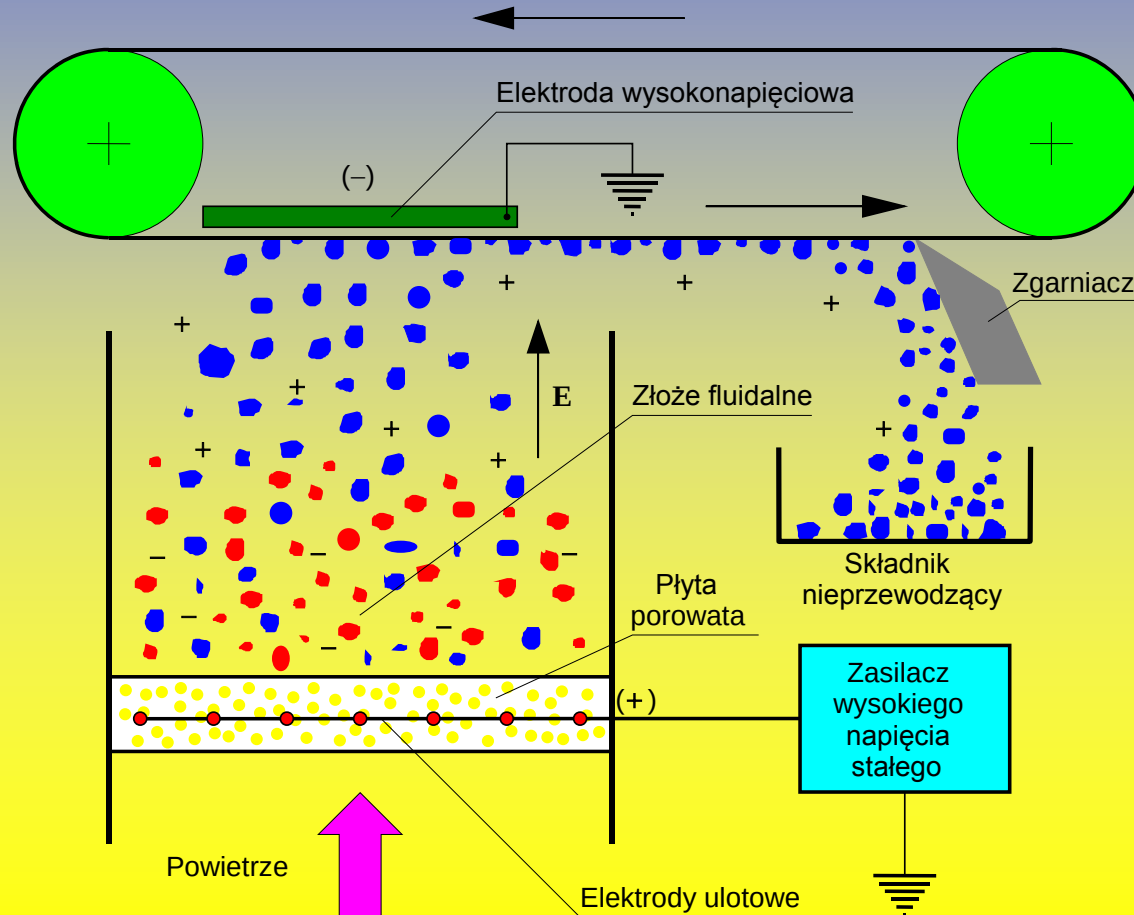


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

Elektroseparacja — wzbogacanie

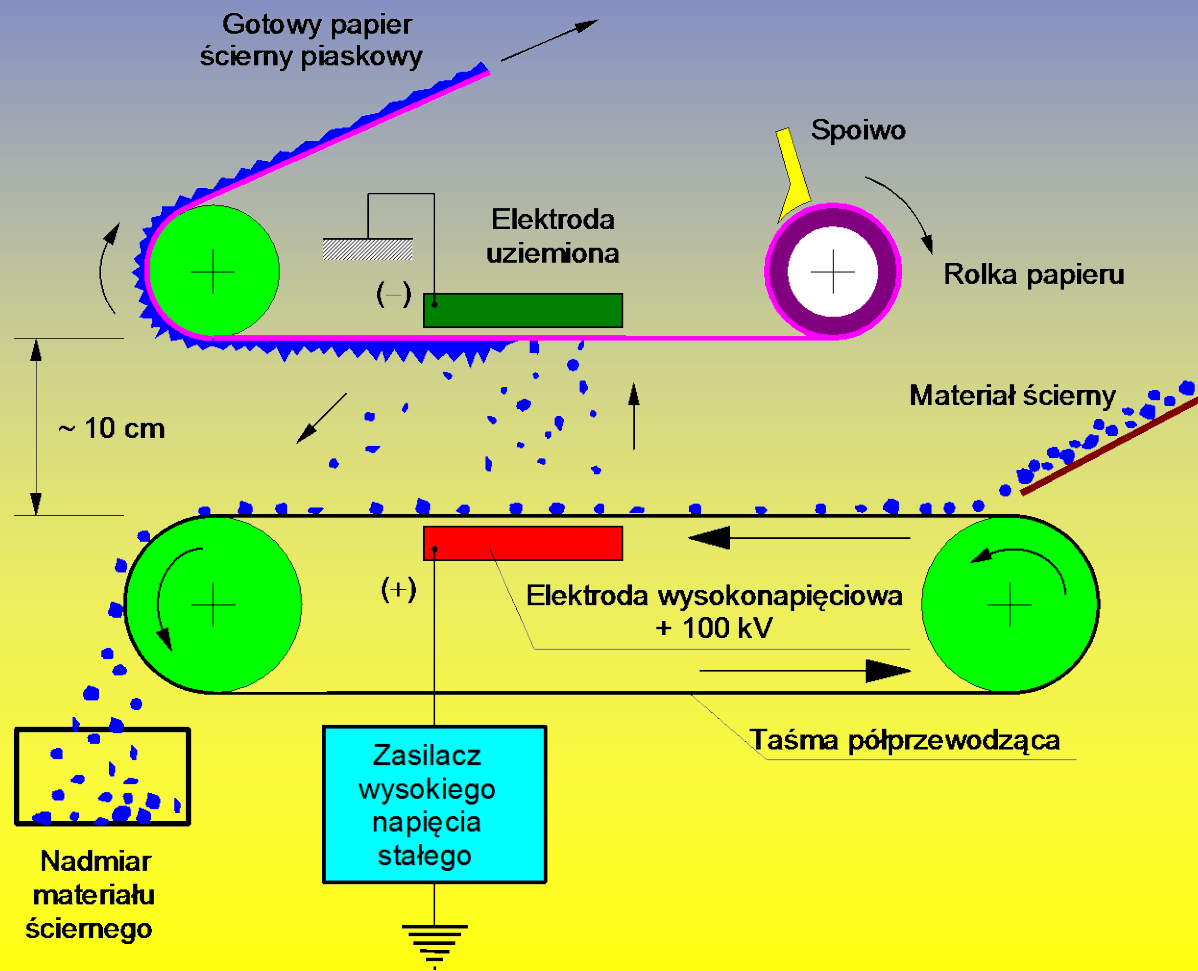


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

Wytwarzanie papieru ściernego

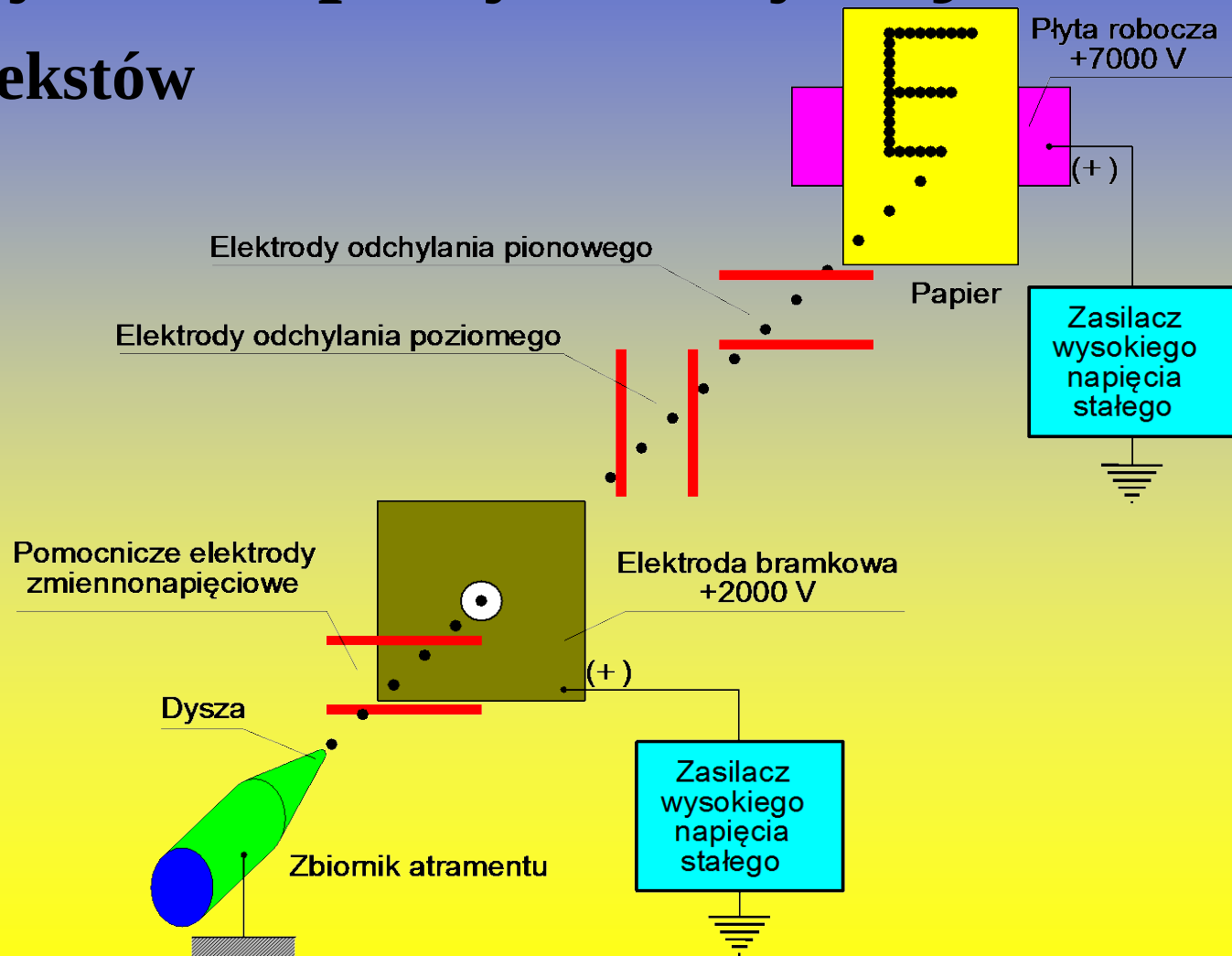


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

Drukowanie tekstów

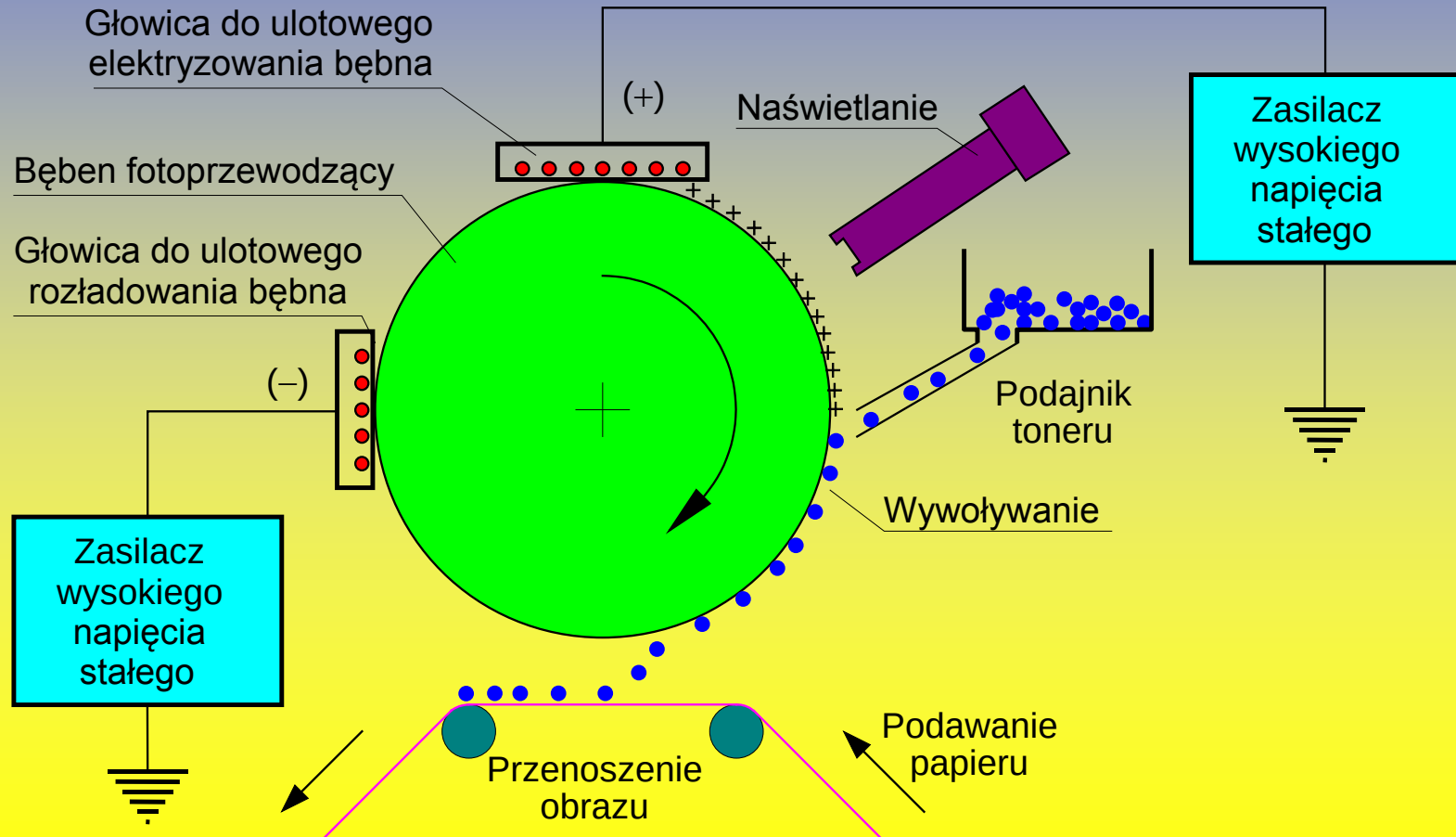


Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Praktyczne aspekty elektryzacji

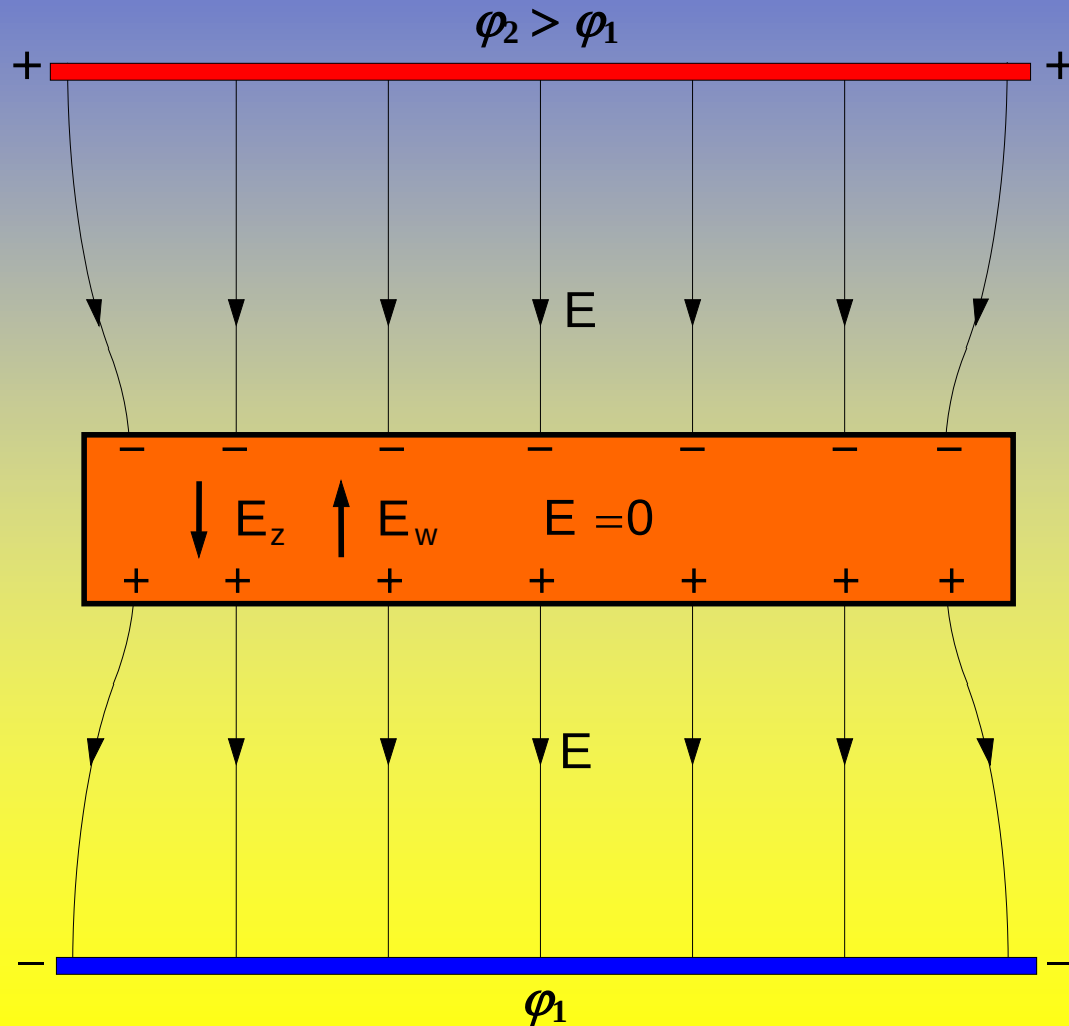
Kopiowanie tekstów



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Przewodniki w polu elektrycznym

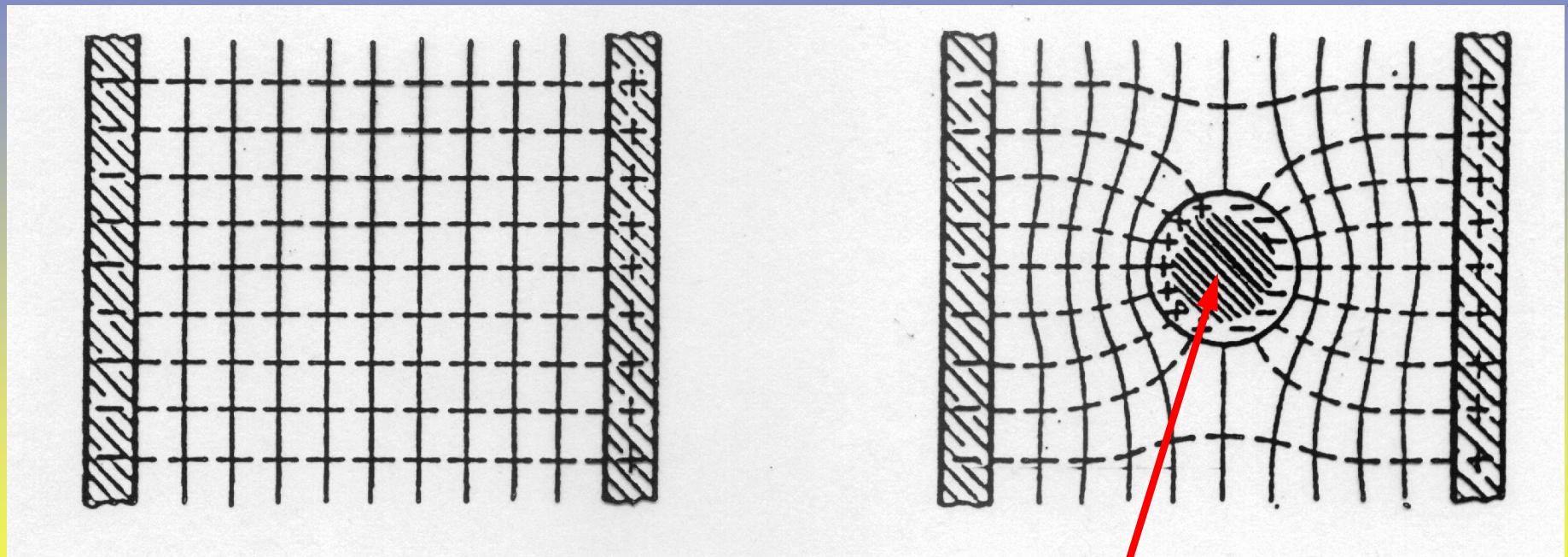


$$\mathbf{E}_z + \mathbf{E}_w = \mathbf{E} = 0$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Przewodniki w polu elektrycznym



Indukcja elektrostatyczna — separacja ładunku elektrycznego w przewodniku w zewnętrznym polu elektrycznym (elektryzowanie, elektryzacja przewodnika)

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Przewodniki w polu elektrycznym

$$\mathbf{E} = 0$$

1. $q_v = \varepsilon\varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E} = 0$
2. $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = \text{const}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_n \quad i \quad \mathbf{E}_t = 0$$

$$\mathbf{E} = \frac{q_s}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Rozkład gęstości ładunku na powierzchni przewodnika

Ostrze

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{q_s 4\pi r^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{q_s}{\epsilon\epsilon_0} r$$

$$q_s = \epsilon\epsilon_0 \frac{\varphi}{r}$$

$$E = \frac{q_s}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\varphi}{r}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pojemność elektryczna

Pojemność elektryczna przewodnika odosobnionego

$$\varphi = kQ$$

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R} \quad \leftarrow \text{Potencjał kuli}$$



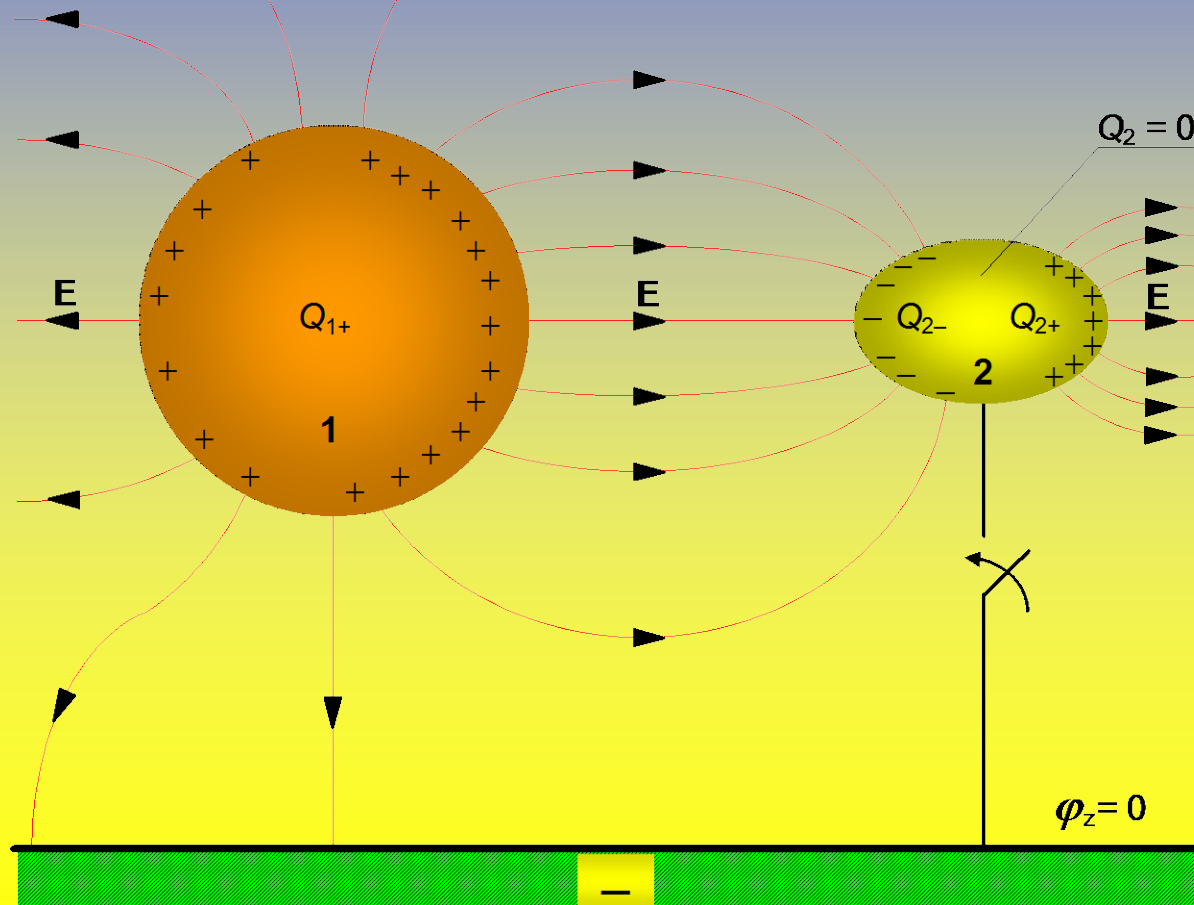
$$C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R \quad \leftarrow \text{Pojemność kuli}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pojemność elektryczna

Pojemność wzajemna — układy przewodników



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pojemność elektryczna

Pojemność wzajemna — układy przewodników

$$\varphi_1 = \varphi'_1 + \varphi''_1 = \alpha_{11}Q_1 + \alpha_{12}Q_2$$

$$\varphi_2 = \varphi'_2 + \varphi''_2 = \alpha_{21}Q_1 + \alpha_{22}Q_2$$

α_{ij} – współczynniki potencjałowe

$$Q_1 = \beta_{11}\varphi_1 + \beta_{12}\varphi_2$$

$$Q_2 = \beta_{21}\varphi_1 + \beta_{22}\varphi_2$$

β_{ij} – współczynniki indukcji elektrycznej

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pojemność elektryczna

Pojemność wzajemna — układy przewodników

$$Q_1 = C_{11}(\varphi_1 - 0) + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = C_{11}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1 - \varphi_2)$$
$$Q_2 = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}(\varphi_2 - 0) = C_{21}(\varphi_2 - \varphi_1) + C_{22}\varphi_2$$

C_{ij} – pojemności cząstkowe

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Pojemność elektryczna

Pojemność wzajemna — kondensator

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{C} Q$$

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}$$

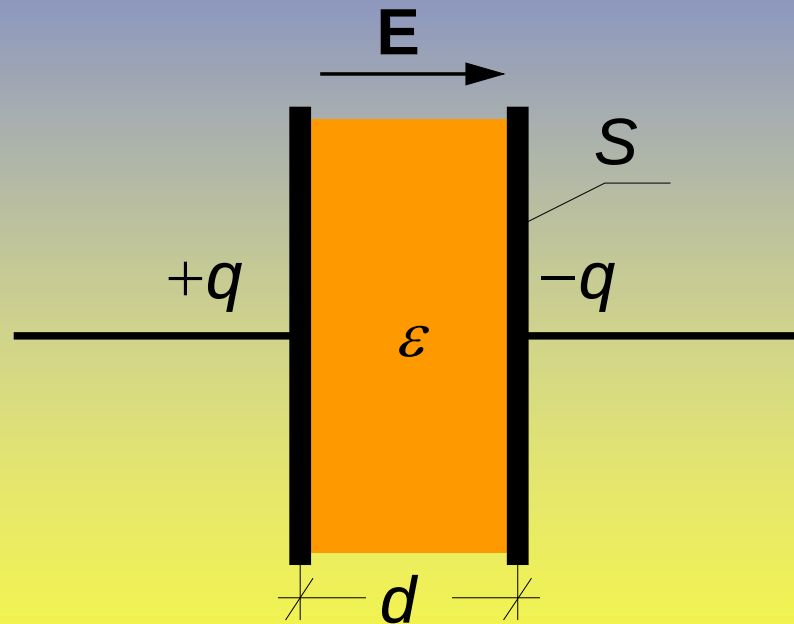
$$C = \frac{|Q|}{|\varphi_1 - \varphi_2|}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Kondensator

Kondensator płaski



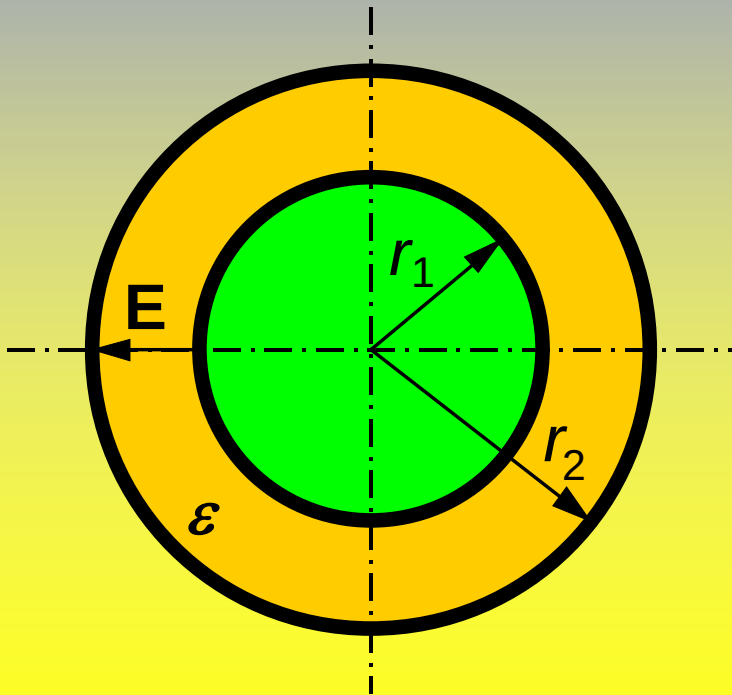
$$C = \epsilon \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Kondensator

Kondensator kulisty



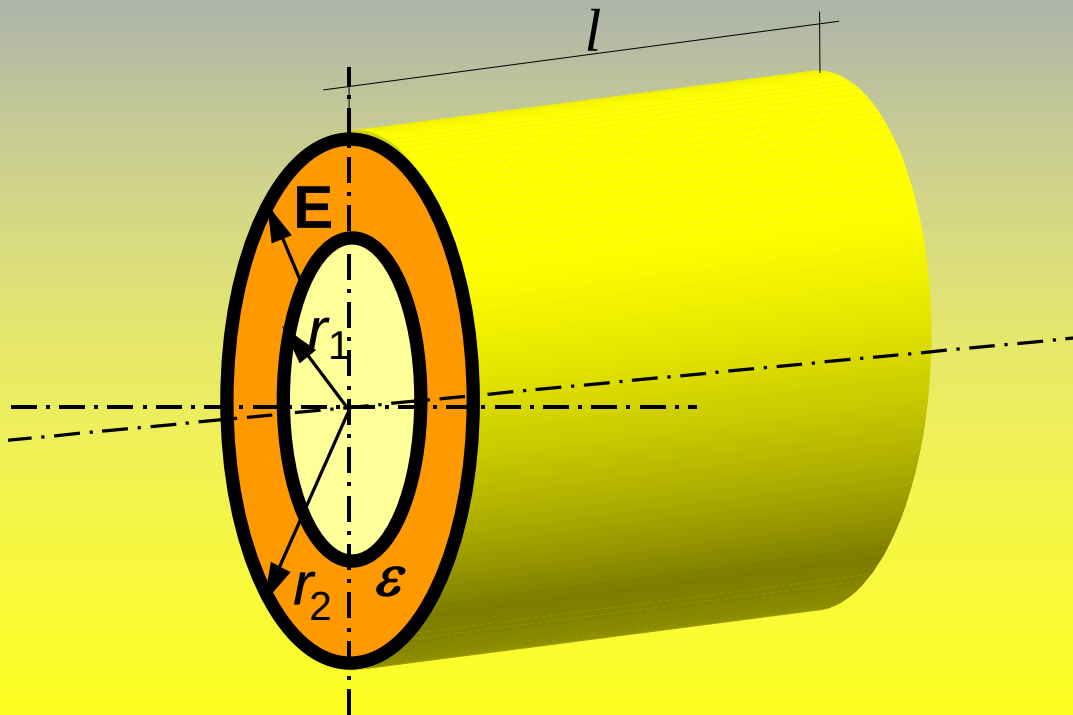
$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Kondensator

Kondensator walcowy (cylindryczny)



$$C = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0 l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

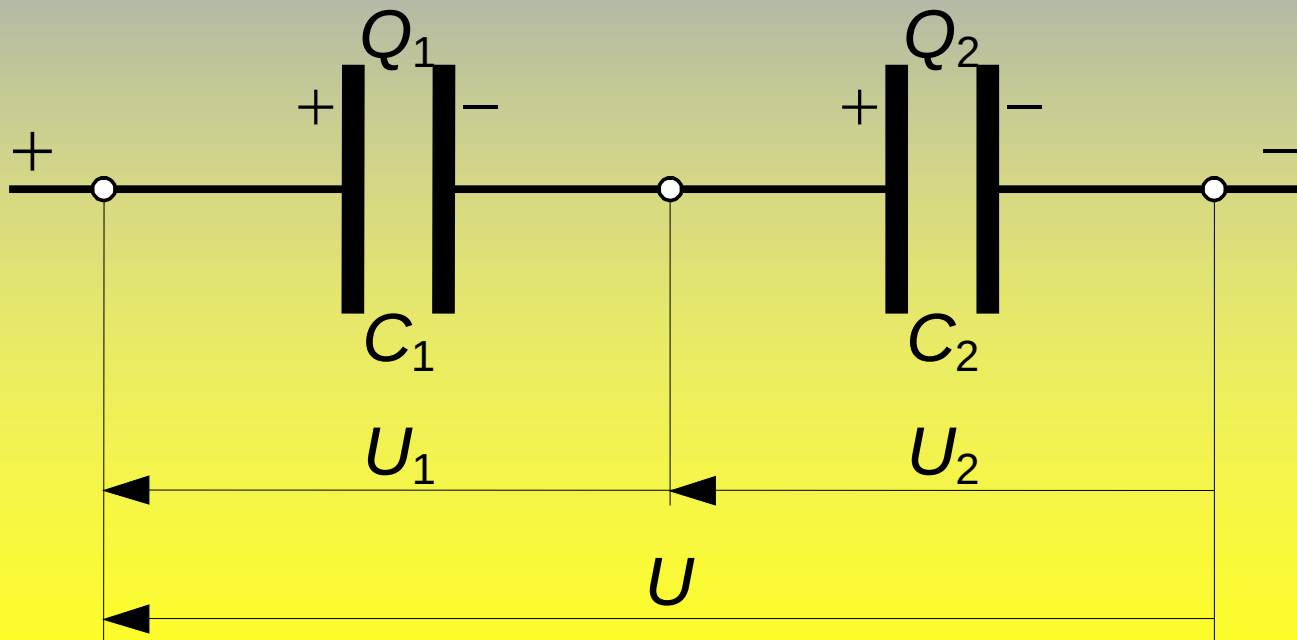
Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Kondensator

Połączenia kondensatorów

Szeregowe



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Kondensator

Połączenia kondensatorów

Szeregowe

$$U_1 = \frac{Q_1}{C_1} \quad \text{i} \quad U_2 = \frac{Q_2}{C_2} \quad \text{oraz} \quad U = U_1 + U_2 = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2}$$

$$Q_1 = Q_2 = Q$$

$$U = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = Q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{Q}{C}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Kondensator

Połączenia kondensatorów

Szeregowe

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{albo} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

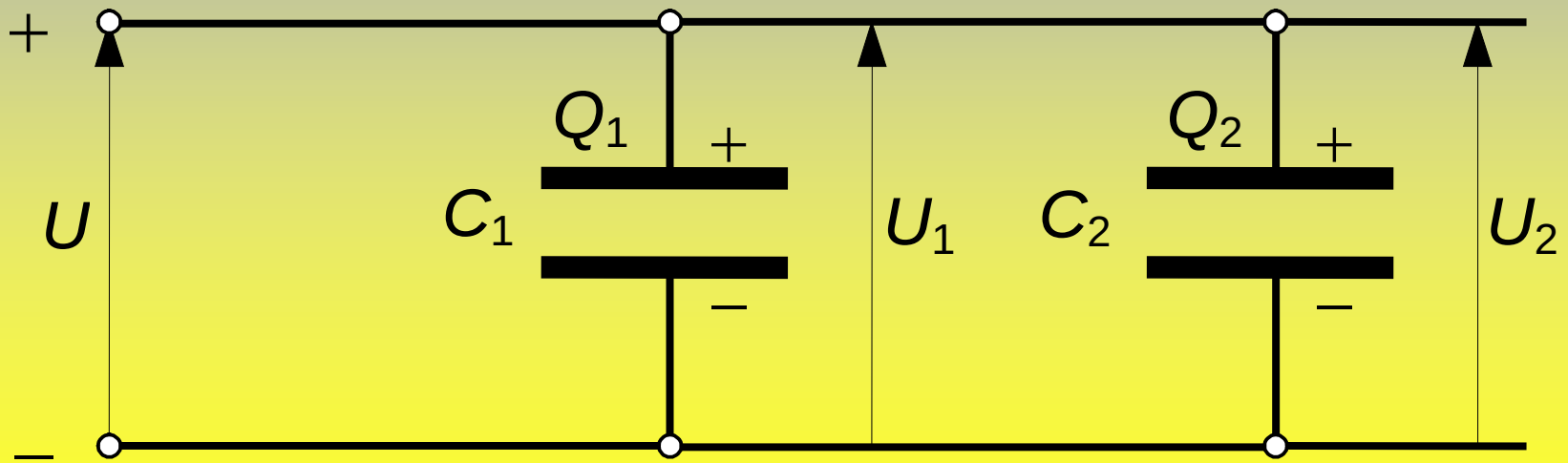
Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Kondensator

Połączenia kondensatorów

Równoległe



Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Kondensator

Połączenia kondensatorów

Równoległe

$$U = U_1 = U_2 \quad \text{oraz} \quad Q = Q_1 + Q_2 = C_1 U_1 + C_2 U_2$$

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{U} = C_1 + C_2$$

$$C = \sum_{i=1}^n C_i$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Energia pola elektrostatycznego

$$dW = \varphi dQ = \frac{Q}{C} dQ \Rightarrow W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{Q^2}{2C}$$

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2}$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Energia kondensatora

$$W = \int_0^U CU \, dU = \frac{CU^2}{2} = \frac{QU}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Jeśli

$$C = \epsilon\epsilon_0 \frac{S}{d} \quad \text{i} \quad U = Ed$$



$$W = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2} V = \frac{DE}{2} V$$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Energia kondensatora

lub

$$W = \frac{\epsilon\epsilon_0 U^2}{2} \frac{S}{d} = \frac{Q^2}{2\epsilon\epsilon_0} \frac{d}{S}$$

- $U = \text{const.} \wedge S = \text{const.} \Rightarrow W \propto 1/d$
- $Q = \text{const.} \wedge S = \text{const.} \Rightarrow W \propto d$

Elektrostatyka.

Pola elektryczne i elektrostatyczne

Energia układu wielu przewodników

Dla $\varphi_i = \text{const.}$ i $i = 1, 2, \dots, n$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_S \varphi_i q_{s_i} dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i \int_S q_{s_i} dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \varphi_i Q_i$$

