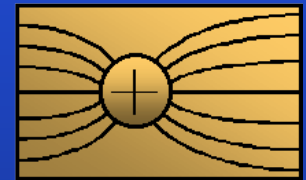




Politechnika Wrocławska



Wydział Mechaniczno-Energetyczny



Podstawy elektrotechniki

Prof. dr hab. inż. Juliusz B. Gajewski, prof. zw. PWr

Wybrzeże S. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Bud. A4 „Stara kotłownia”, pokój 359

Tel.: 71 320 3201

Fax: 71 328 3218

E-mail: juliusz.b.gajewski@pwr.edu.pl

Internet: www.itcmp.pwr.wroc.pl/elektra

Elektrodynamika.

Prąd stały

P r ą d e l e k t r y c z n y jest to uporządkowany ruch ładunków elektrycznych w przestrzeni przez dany przekrój poprzeczny środowiska pod działaniem pola elektrycznego. Pole to charakteryzuje się wektorowo przez natężenie pola elektrycznego E albo skalarnie przez napięcie elektryczne U . W skrócie mówi się po prostu „prąd”.

P r ą d e l e k t r y c z n y s t a ł y jest to prąd elektryczny płynący tylko w jednym kierunku w przeciwieństwie do prądu przemiennego.

Elektrodynamika.

Prąd stały

Obwód i układ elektryczny

Prąd elektryczny, albo po prostu prąd, występuje albo inaczej *plynie* w pewnym obwodzie zamkniętym albo po prostu obwodzie, w którym istnieje co najmniej jedna droga zamknięta dla przepływu prądu. Jeśli dróg tych jest więcej niż jedna, wówczas obwód taki nazywa się rozgałęziony i składa się z kilku oczek ze sobą połączonych. Obwód rozgałęziony nazywa się również układem elektrycznym. Jedno oczko *odosobnione* stanowi obwód nierozgałęziony.

Elektrodynamika.

Prąd stały

Obwód i układ elektryczny

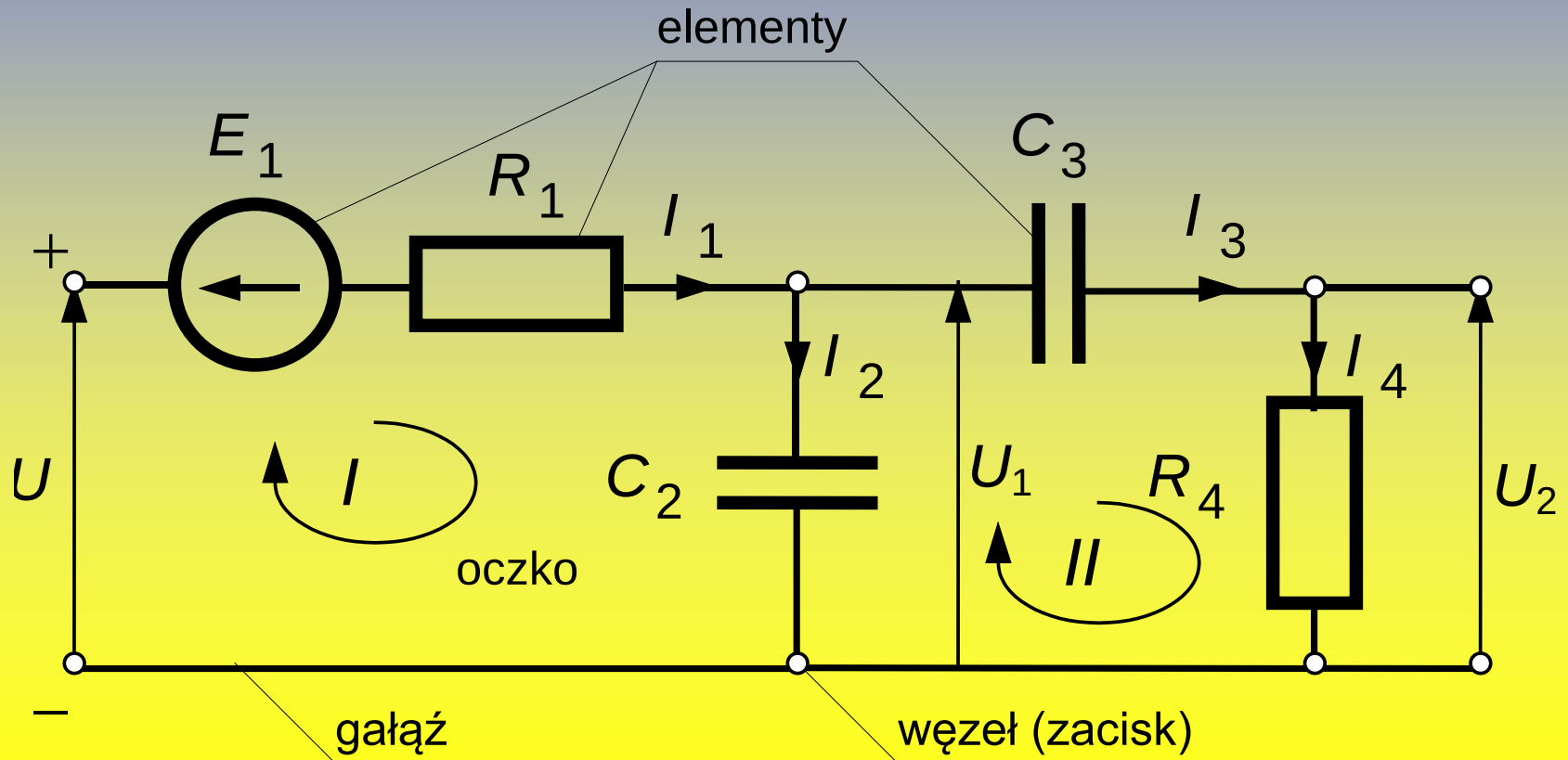
O b w ó d albo o c z k o są utworzone z g a ł ę z i, z których każda ma wyprowadzone na zewnątrz dwie końcówki zwane w ę z ł a m i albo z a c i s k a m i, do których mogą być przyłączane następne gałęzie. Węzłom obwodu albo układu przyporządkowuje się *potencjał*. Gałęzie składają się z połączonych ze sobą elementów. Element elektryczny, np. opornik, kondensator, cewka, akumulator, jest to część obwodu niepodzielna pod względem funkcjonalnym bez utraty swoich własności charakterystycznych.

Jeśli elementy elektryczne (albo po prostu e l e m e n t y) obwodu albo cały obwód opisują l i n i o w e równania algebraiczne albo różniczkowe, to obwód elektryczny jest l i n i o w y.

Elektrodynamika.

Prąd stały

Obwód i układ elektryczny



Elektrodynamika.

Prąd stały

Natężenie prądu elektrycznego

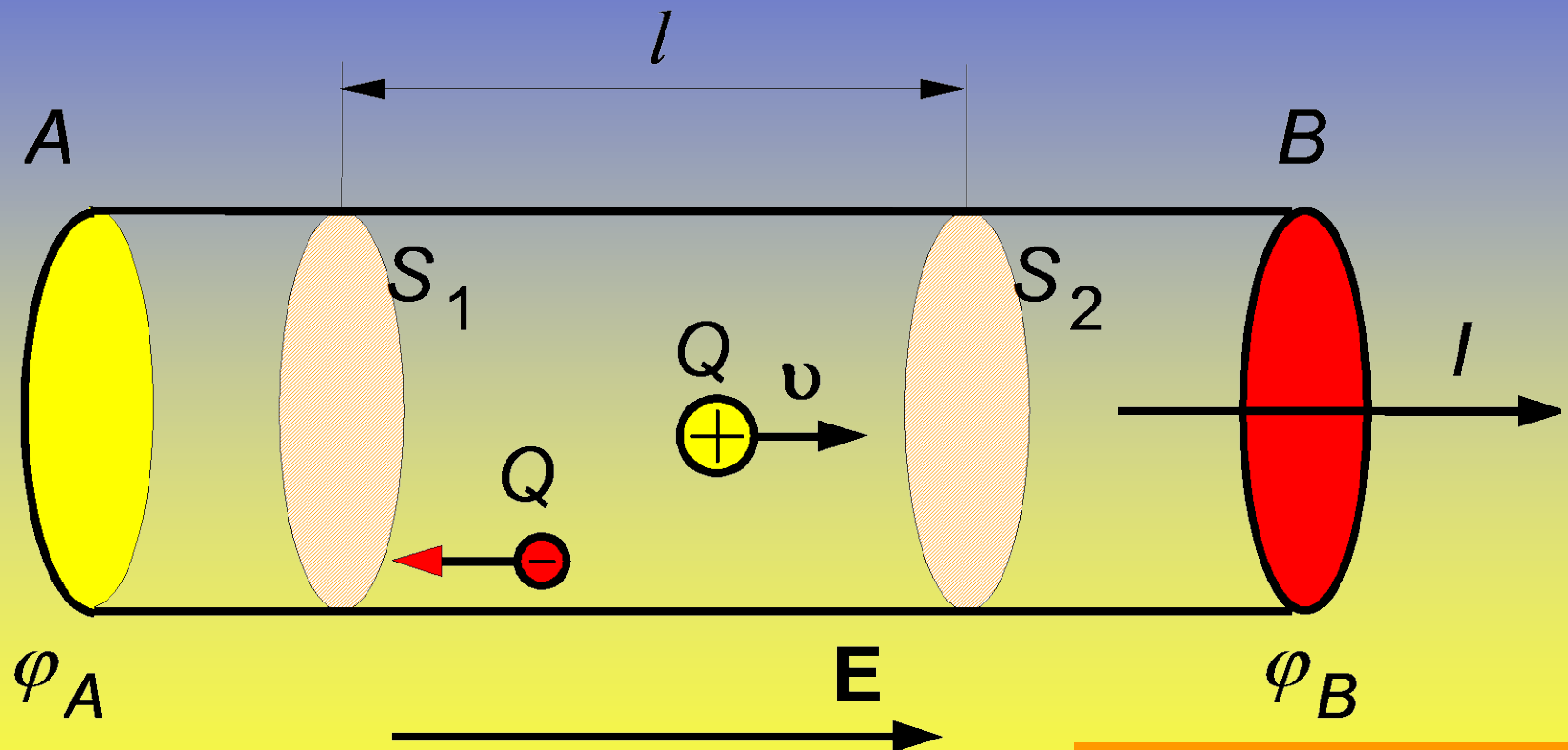
$$i \stackrel{df}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

$$i = I = \frac{Q}{t} \longleftarrow \text{Prąd elektryczny stały}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Natężenie prądu elektrycznego



$$Q_{S_1} = Q_{S_2} = \text{const}$$

$$\varphi_A > \varphi_B$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Natężenie prądu elektrycznego

$$v = \frac{dl}{dt} \quad i \quad dI = \frac{dq}{dt}$$



$$dI dl = dq v$$

Gęstość prądu elektrycznego

$$dI dl \cdot dS = dq v \cdot dS$$

gdzie $dl \cdot dS = dV$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Gęstość prądu elektrycznego

$$dI = \frac{dq}{dV} d\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Ponieważ $dq/dV = q_v$

$$\mathbf{J} = \frac{dI}{dS} = \frac{dq}{dV} \mathbf{v} = q_v \mathbf{v}$$

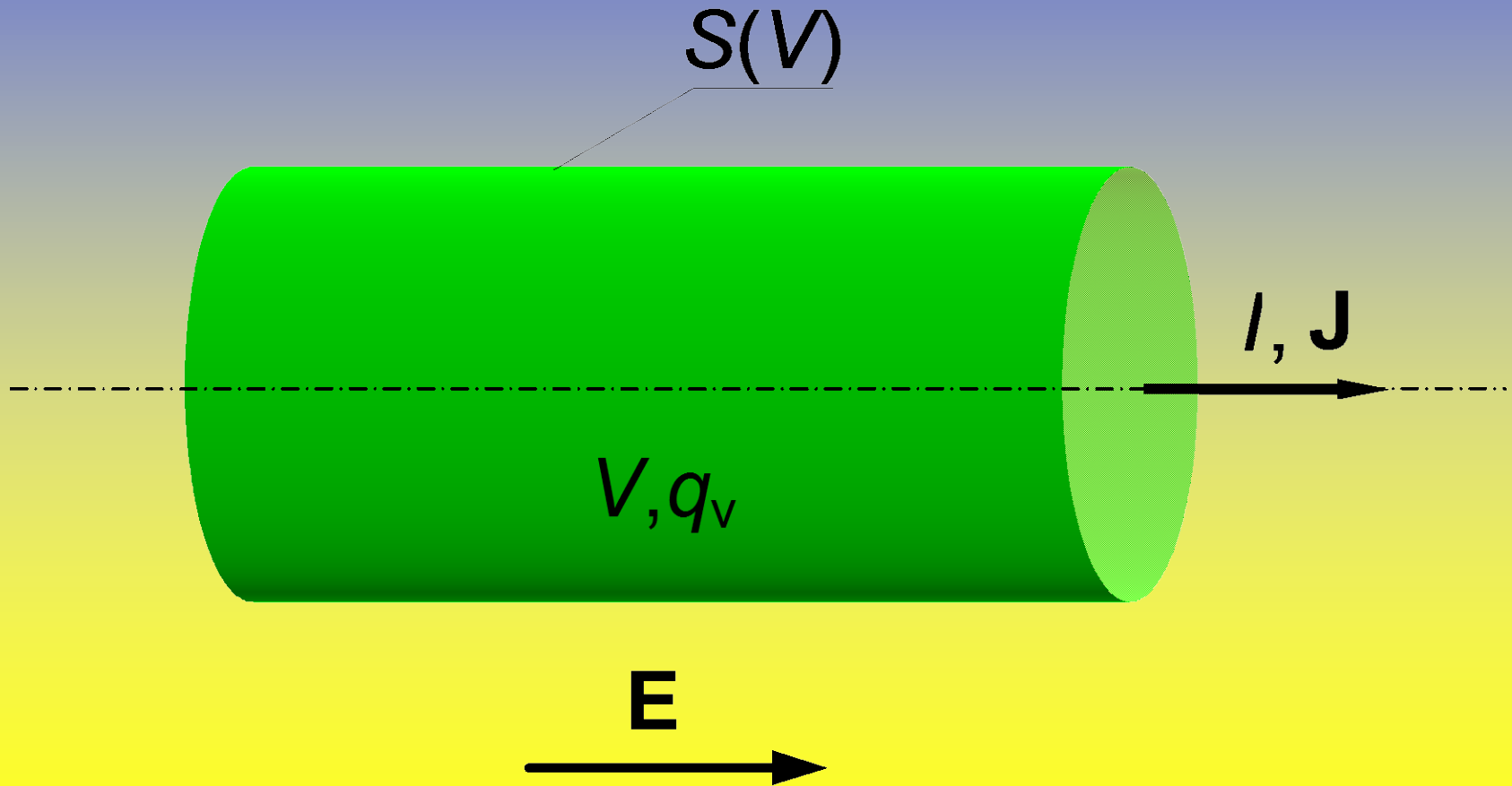


Gęstość prądu elektrycznego

Elektrodynamika.

Prąd stały

Równanie ciągłości prądu elektrycznego



Elektrodynamika.

Prąd stały

Równanie ciągłości prądu elektrycznego

$$I = \int_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\left(- \int_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \right) dt = dQ \quad \Rightarrow \quad \int_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = - \frac{dQ}{dt}$$

Z prawa *Gaussa-Ostrogradskiego* wynika, że

$$\int_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dV = - \frac{d}{dt} \int_V q_v dV = - \int_V \frac{\partial q_v}{\partial t} dV$$

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial q_v}{\partial t} = 0 \quad \leftarrow \text{Równanie ciągłości prądu}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawo *Ohma*

Prawo *Ohma* według klasycznej teorii elektronowej

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}$$

gdzie $\rho = 1/\gamma$

ρ — rezystywność albo opór właściwy przewodnika [$\Omega \cdot \text{m}$]

γ — konduktywność albo przewodność właściwa [$\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$]

$$\partial q_v / \partial t = 0 \Rightarrow \text{div} \mathbf{J} = 0 \Rightarrow \mathbf{J} = 0$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawo Ohma

Ogólne prawo Ohma

Wypadkowe pole w przewodniku jest sumą wektorową pól kulombowskiego $\mathbf{E}_k$ i sił zewnętrznych $\mathbf{E}_z$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_k + \mathbf{E}_z$$

$$I \int_A^B \rho \frac{dl}{S} = \int_A^B \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} + \int_A^B \mathbf{E}_z \cdot d\mathbf{l}$$



Przewodnik o długości od A do B o jednakowym natężeniu prądu we wszystkich jego przekrojach

Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawo *Ohma*

Ogólne prawo *Ohma*

$$\text{Dla } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -d\varphi$$

$$\int_A^B \mathbf{E}_k \cdot d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B = U_{AB} \leftarrow \text{Różnica potencjałów na odcinku } AB$$

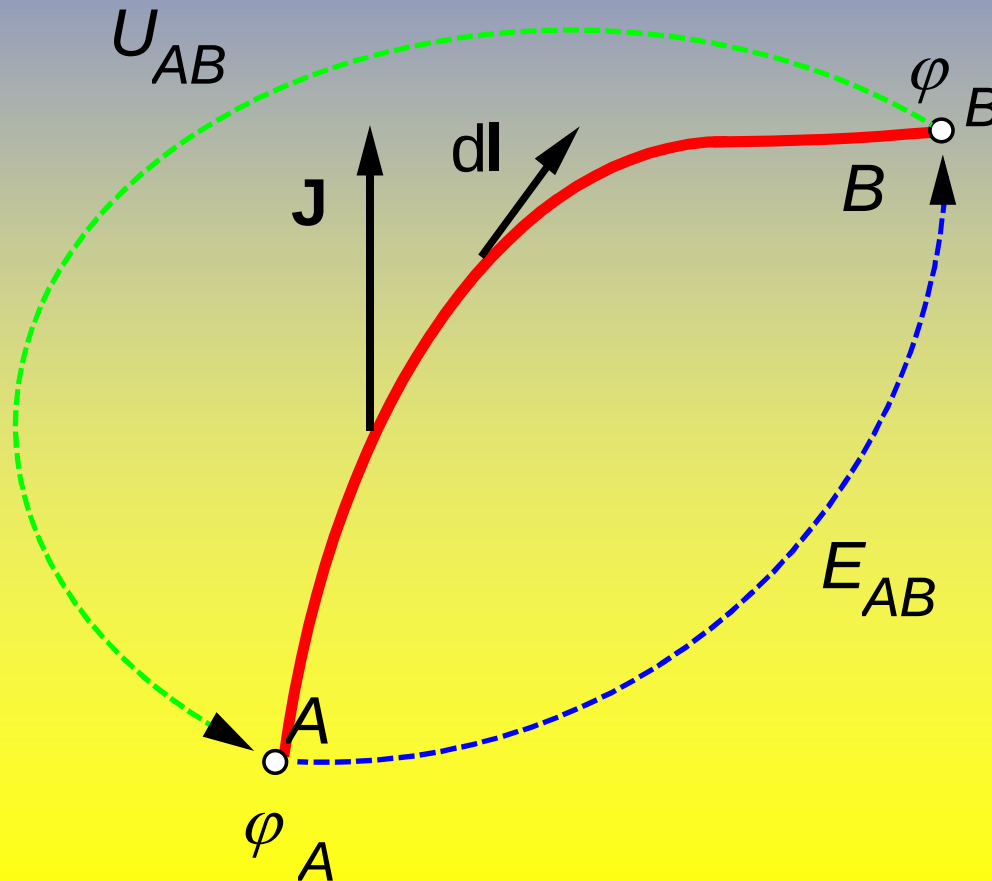
$$\int_A^B \mathbf{E}_z \cdot d\mathbf{l} = E_{AB} = -E_{BA} \leftarrow \text{Siła elektromotoryczna SEM na odcinku } AB$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawo *Ohma*

Ogólne prawo *Ohma*



Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawo *Ohma*

Ogólne prawo *Ohma*

$$U_{AB}^* = \int_A^B (\mathbf{E}_k + \mathbf{E}_z) \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = U_{AB} + E_{AB}$$

Dla $\mathbf{J} = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ i $S = \text{const}$

$$\int_A^B \rho \mathbf{J} \cdot d\mathbf{l} = \int_A^B \rho \frac{I}{S} dl = \rho \frac{l_{AB}}{S} I = R_{AB} I$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawo *Ohma*

Ogólne prawo *Ohma*

$$R_{AB} = \rho \frac{l_{AB}}{S} \leftarrow \text{Opór albo rezystancja przewodnika}$$

$$U_{AB}^* = IR_{AB}$$

albo

$$IR_{AB} = U_{AB} + E_{AB}$$

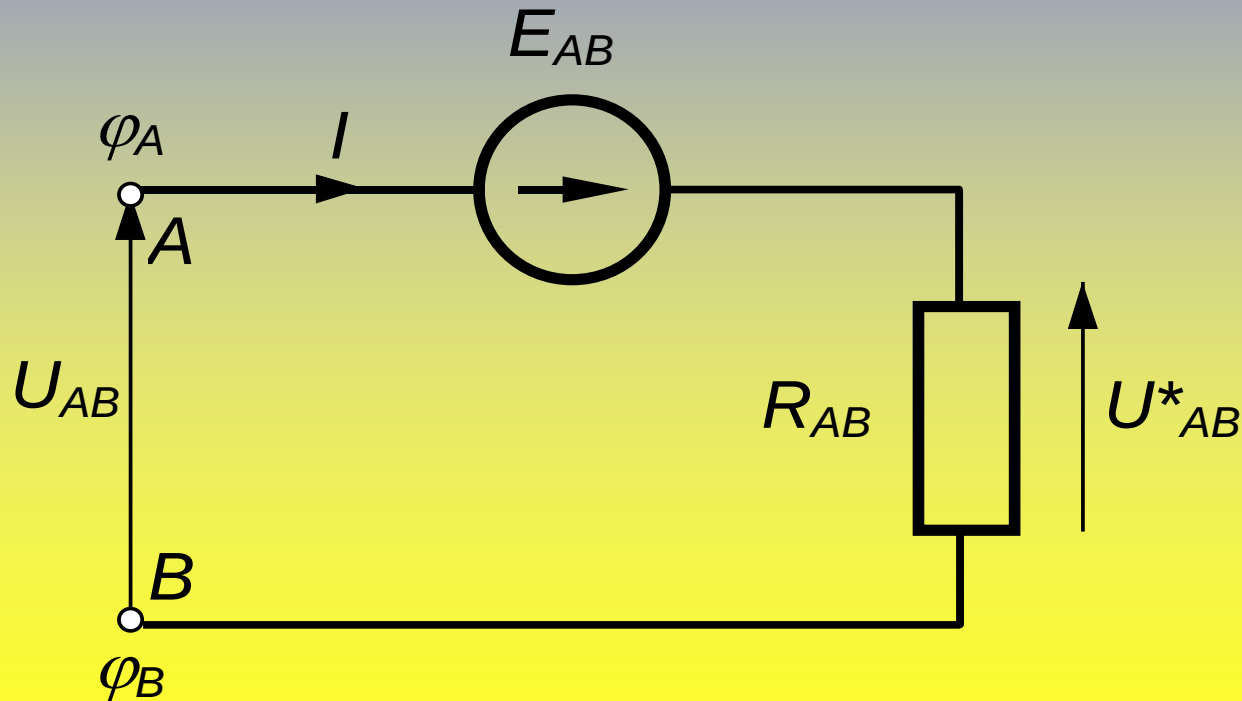
gdzie U_{AB}^* jest spadkiem napięcia na rezystancji R_{AB}

Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawo *Ohma*

Ogólne prawo *Ohma*



Elektrodynamika.

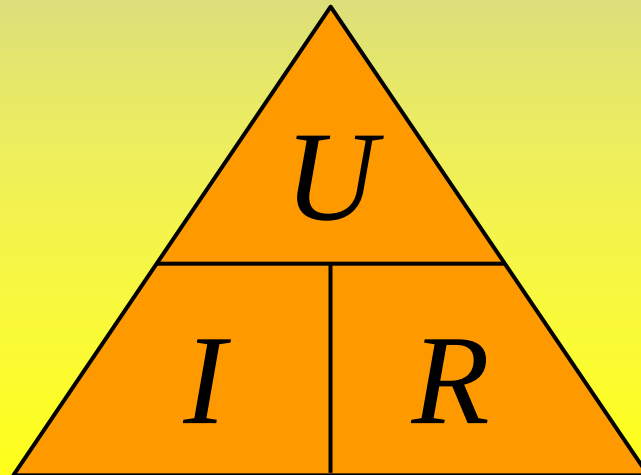
Prąd stały

Prawo *Ohma*

Ogólne prawo *Ohma*

Gdy $\varphi_A = \varphi_B$, $R_{AB} = R$, $E_{AB} = E = U$

$$IR = E = U$$



Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawa *Kirchhoffa* w polu prądowym, przepływowym

I prawo

$$\oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

II prawo

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Energia, moc, ciepło. Prawo *Joule'a–Lenza*

$$dW = UI dt \Rightarrow W = UI t \quad \leftarrow \quad \text{Praca prądu stałego}$$

$$P = \frac{dW}{dt} = UI \quad [\text{W}] \quad \leftarrow \quad \text{Moc prądu stałego}$$

$$W = RI^2 t \quad [\text{J}] \quad \leftarrow \quad \text{Energia elektryczna}$$

Ponieważ
 $1 \text{ cal} = 4.185 \text{ J}$
 $1 \text{ J} = 0.24 \text{ cal}$

$$Q \cong 0.24 RI^2 t \quad [\text{cal}] \quad \leftarrow \quad \text{Ciepło}$$

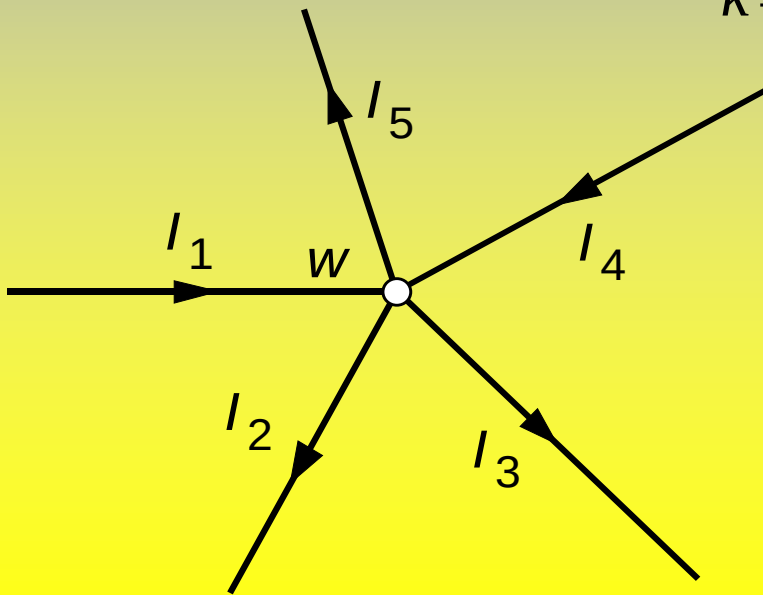
Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawa *Kirchhoffa* dla liniowych obwodów elektrycznych

I prawo prądowe

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0$$



$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0$$

albo

$$I_1 + I_4 = I_2 + I_3 + I_5$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawa *Kirchhoffa* dla liniowych obwodów elektrycznych

II prawo napięciowe

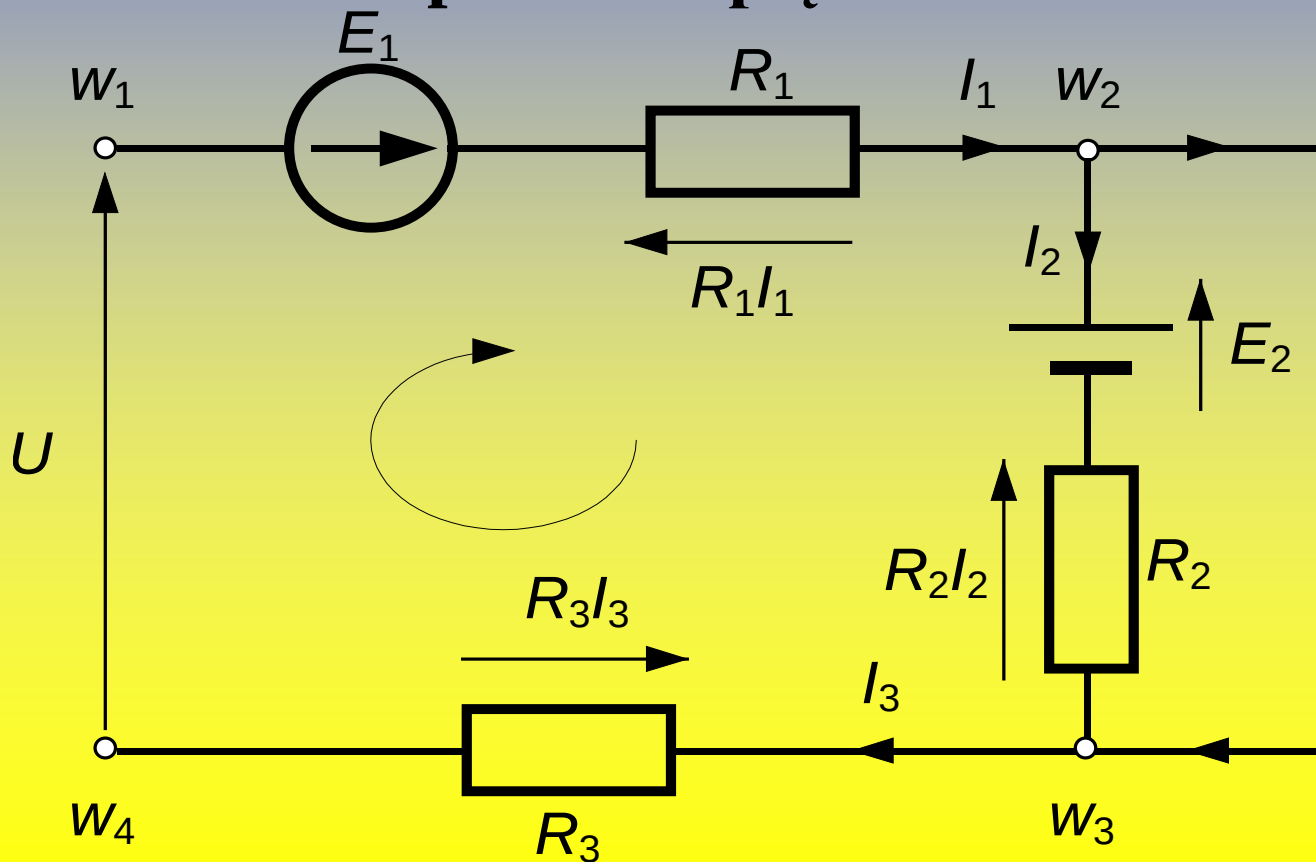
$$\sum_{k=1}^n R_k I_k = \sum_{k=1}^n E_k$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawa *Kirchhoffa* dla liniowych obwodów elektrycznych

II prawo napięciowe



Elektrodynamika.

Prąd stały

Prawa *Kirchhoffa* dla liniowych obwodów elektrycznych

II prawo napięciowe

$$U + E_1 - R_1 I_1 - E_2 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0$$

∨

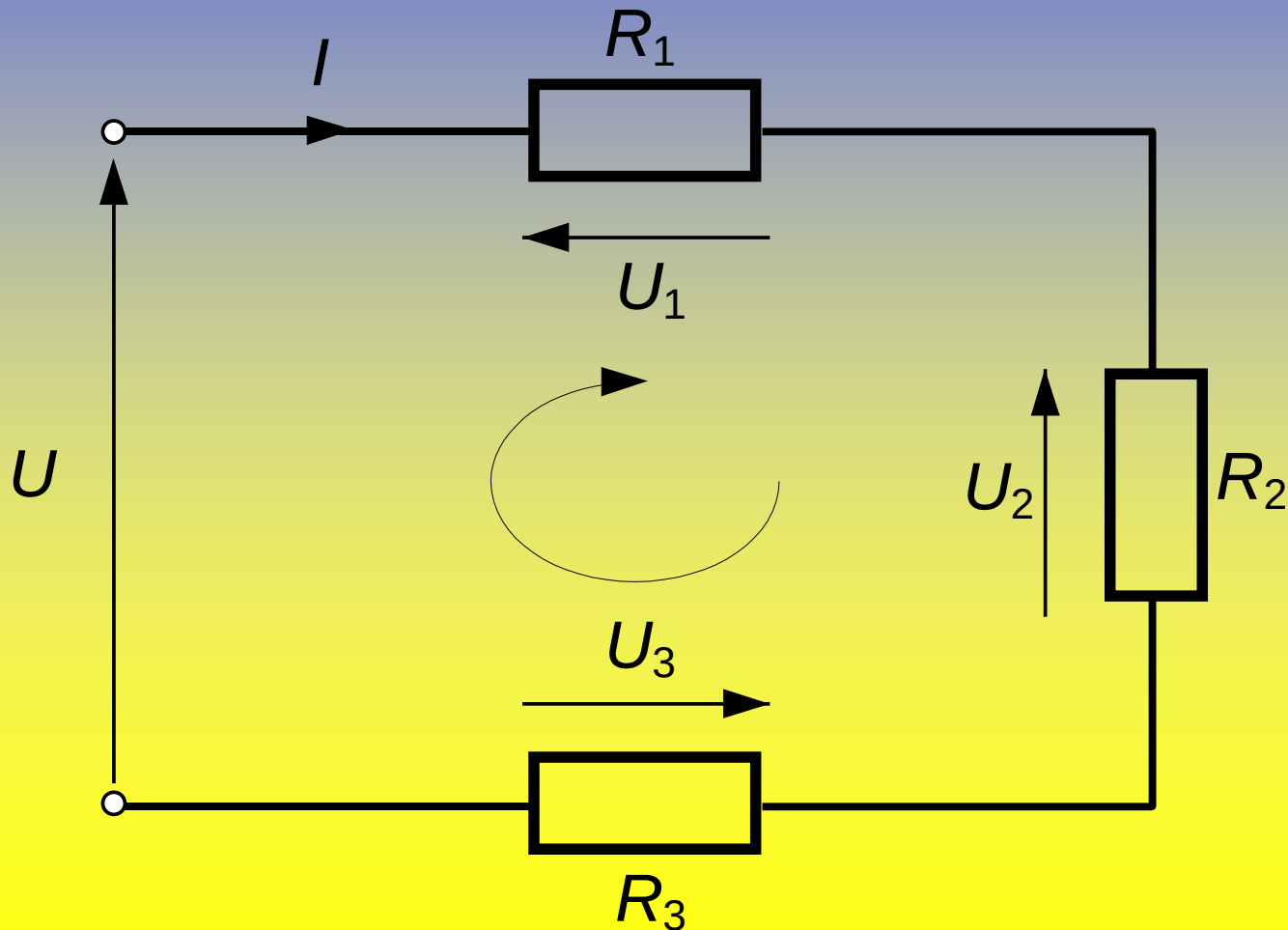
$$U + E_1 - E_2 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_3 I_3$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Połączenia oporników (rezystorów)

Szeregowe



Elektrodynamika.

Prąd stały

Połączenia oporników (rezystorów)

Szeregowe

$$U_1 = R_1 I; \quad U_2 = R_2 I; \quad U_3 = R_3 I$$

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = (R_1 + R_2 + R_3)I = R_Z I$$

$$R_Z = R_1 + R_2 + R_3$$

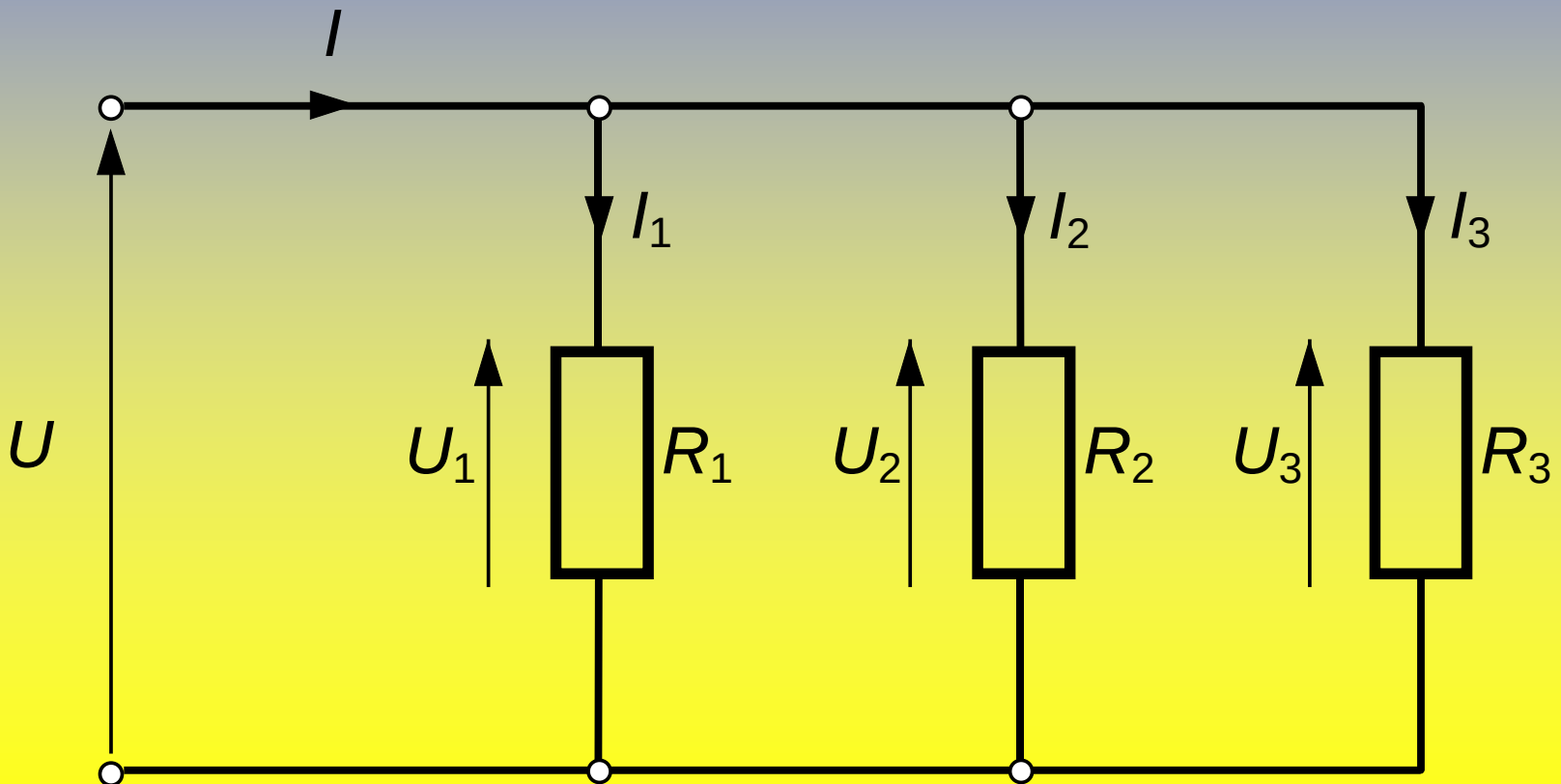
$$R_Z = \sum_{k=1}^n R_k \longleftarrow \text{Rezystancja zastępcza}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Połączenia oporników (rezystorów)

Równoległe



Elektrodynamika.

Prąd stały

Połączenia oporników (rezystorów)

Równoległe

$$I_1 = \frac{U}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U}{R_3}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} = \frac{U}{R_z}$$

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad \Leftrightarrow \quad R_z = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Połączenia oporników (rezystorów)

Równoległe

$$\frac{1}{R_z} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k} \quad \leftarrow \text{Rezystancja zastępcza}$$

Ponieważ $G = 1/R$ — konduktancja

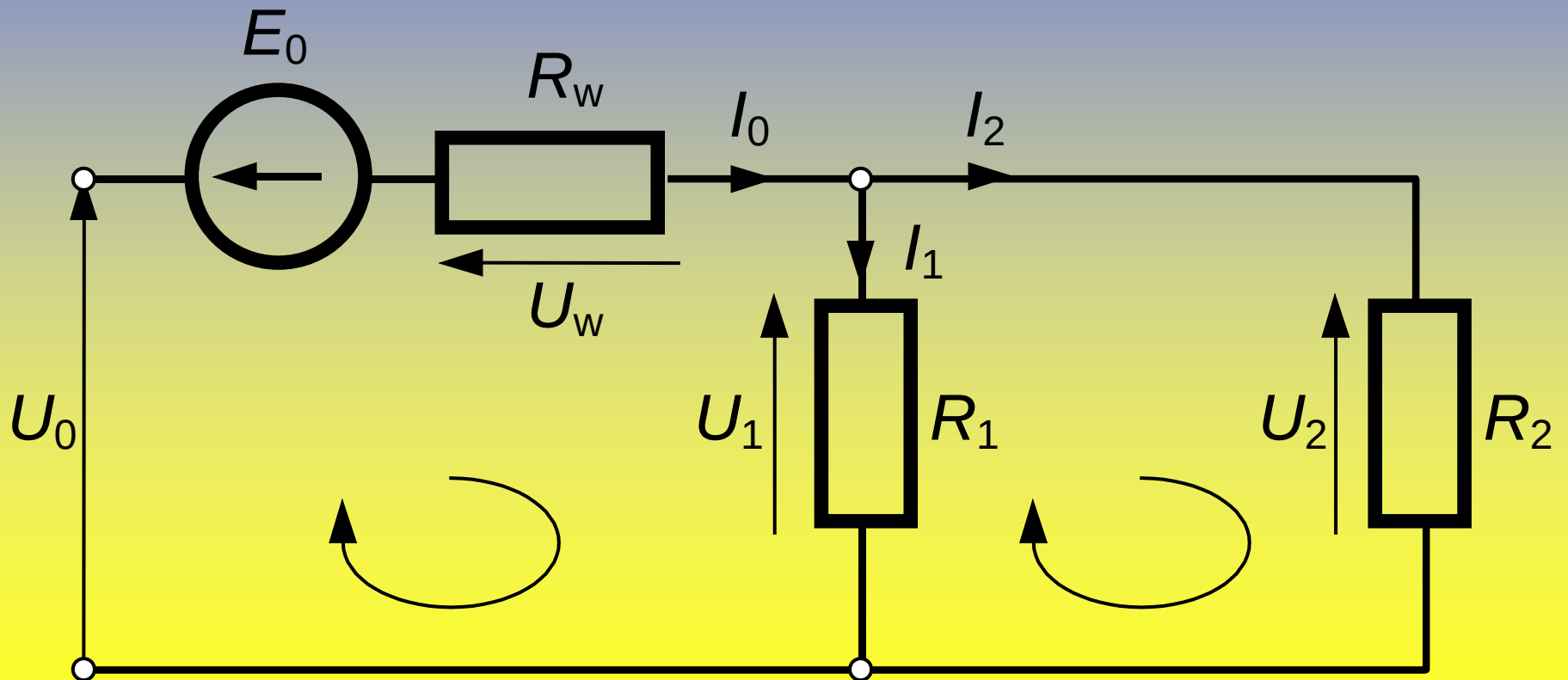
$$G_z = G_1 + G_2 + G_3$$

$$G_z = \sum_{k=1}^n G_k \quad \leftarrow \text{Konduktancja zastępcza}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Przykład obliczania obwodu elektrycznego



Elektrodynamika.

Prąd stały

Przykład obliczania obwodu elektrycznego

Dane: U_0, E_0, R_w, R_1, R_2

Nieznane: I_0, I_1, I_2

Do wyznaczenia: I_2

$$U_0 - E_0 - R_w I_0 - R_1 I_1 = 0 \quad (1)$$

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \Rightarrow I_1 = (R_2 / R_1) I_2 \quad (2)$$

$$I_0 - I_1 - I_2 = 0 \quad (3)$$

$$I_0 = \frac{U_0 - E_0 - R_1 I_1}{R_w} \quad (4)$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Przykład obliczania obwodu elektrycznego

Kombinacja (1), (2) i (3) daje

$$\frac{U_0 - E_0 - R_2 I_2}{R_w} - \frac{R_2}{R_1} I_2 - I_2 = 0 \quad (5)$$



$$I_2 = \frac{U_0 - E_0}{R_2 + R_w \left(1 + R_2 / R_1\right)} \quad (6)$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Przykład obliczania obwodu elektrycznego

$$R_1 \neq R_2 \neq R_W \Leftrightarrow R_{zw} \neq \frac{U_0 - E_0}{I_2} = \frac{U_0 - E_0}{\frac{U_0 - E_0}{R_2 + R_W / R_2}} \approx \frac{U_0 - E_0}{R_2}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Przykład obliczania obwodu elektrycznego

Stan jałowy: $R_2 = \infty$

$$I_2 = 0 \quad \wedge \quad U_1 = R_1 I_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_w} (U_0 - E_0)$$

Stan zwarcia: $R_2 = 0$

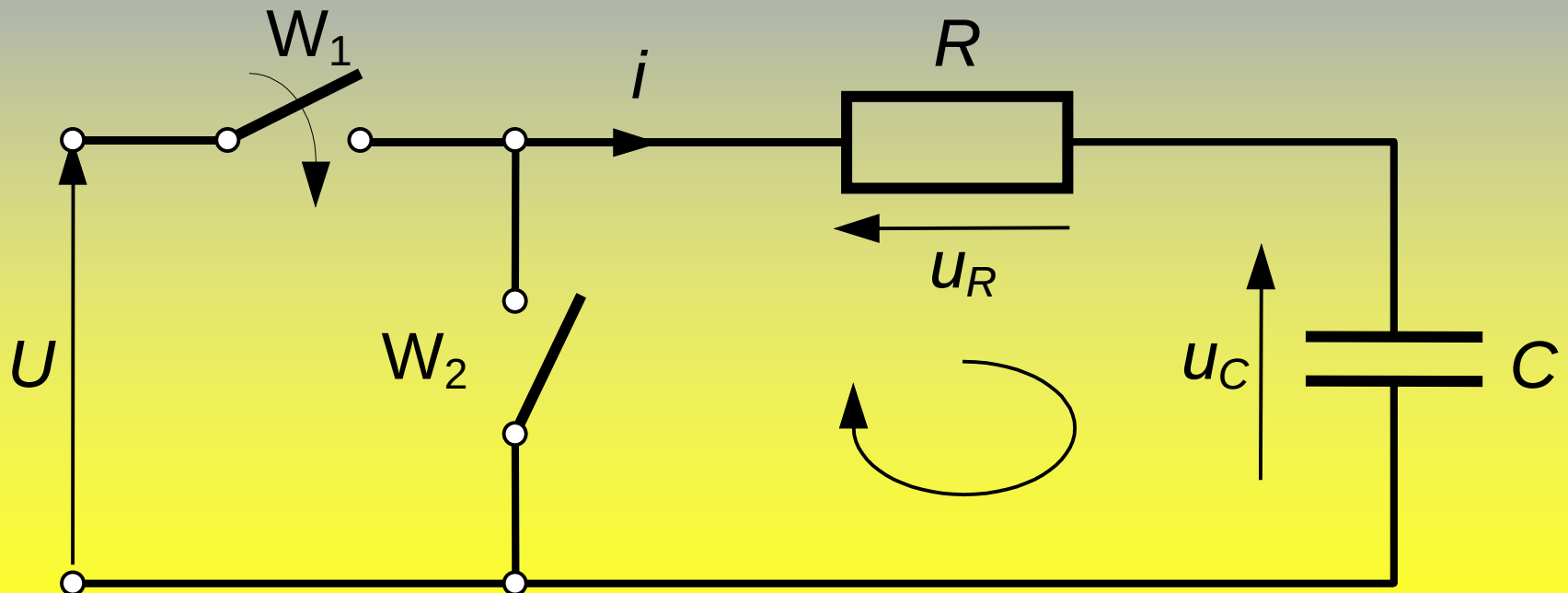
$$I_2 = \frac{U_0 - E_0}{R_w} \quad \wedge \quad U_1 = U_2 = R_2 I_2 = 0$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC przy wymuszeniu stałym

Ładowanie kondensatora



Elektrodynamika.

Prąd stały

**Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC
przy wymuszeniu stałym**

$$U = Ri + u_C \quad \Rightarrow \quad i = \frac{U - u_C}{R}$$

$$dq = idt \quad \wedge \quad dq = Cdu_C$$

$\Downarrow$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC przy wymuszeniu stałym

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U$$

Dla $U = 0$ — równanie różniczkowe liniowe jednorodne

$$T \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \Rightarrow \frac{du_C}{u_C} = -\frac{dt}{T}$$

$T = RC$ — stała czasowa obwodu [s]

Elektrodynamika.

Prąd stały

**Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC
przy wymuszeniu stałym**

$$\ln u_C = -\frac{1}{T} \int_0^t dt + A = -\frac{t}{T} + \ln A$$



$$u_C = Be^{-\frac{t}{T}}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC przy wymuszeniu stałym

Niech $B = B(t)$, zatem

$$\frac{du_C}{dt} = \dot{B} e^{-\frac{t}{T}} - \frac{B}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

Uzmiennianie stałej

$$\dot{B} T e^{-\frac{t}{T}} = U$$



$$B = U \int_0^t \frac{e^{t/T}}{T} dt + D = U e^{\frac{t}{T}} + D$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

**Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC
przy wymuszeniu stałym**

$$u_C = \left(U e^{\frac{t}{T}} + D \right) e^{-\frac{t}{T}} = U + D e^{-\frac{t}{T}}$$

Warunek początkowy: $t = 0 \Rightarrow u_C(0) = 0$

$$0 = U + D \Leftrightarrow D = -U$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

**Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC
przy wymuszeniu stałym**

$$u_C = U - Ue^{-\frac{t}{T}} = U \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

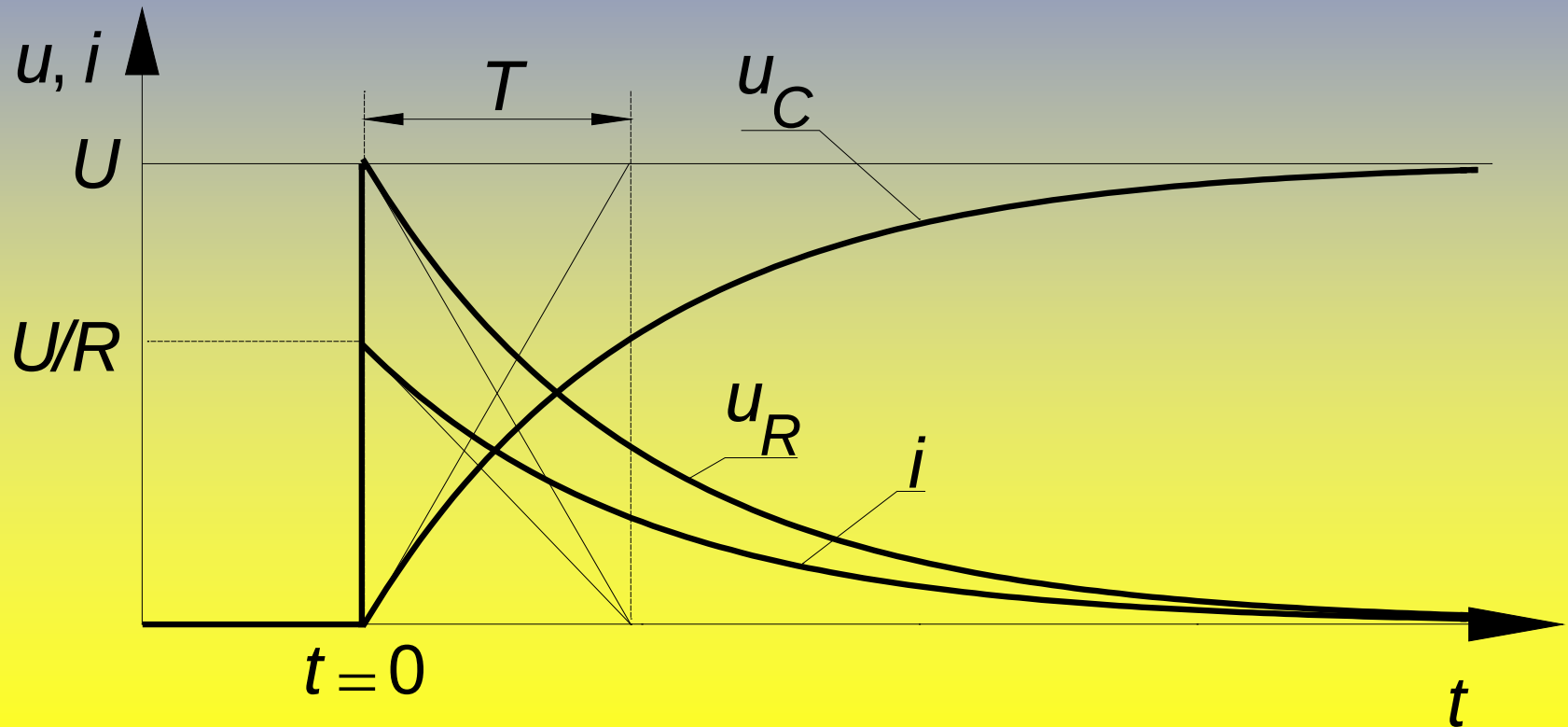
$$t \rightarrow \infty \Rightarrow u_C \rightarrow U$$

$$i = C \frac{du_C}{dt} = CU \frac{d}{dt} \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) = \frac{C}{T} U e^{-\frac{t}{T}} = \frac{U}{R} e^{-\frac{t}{T}}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC
przy wymuszeniu stałym

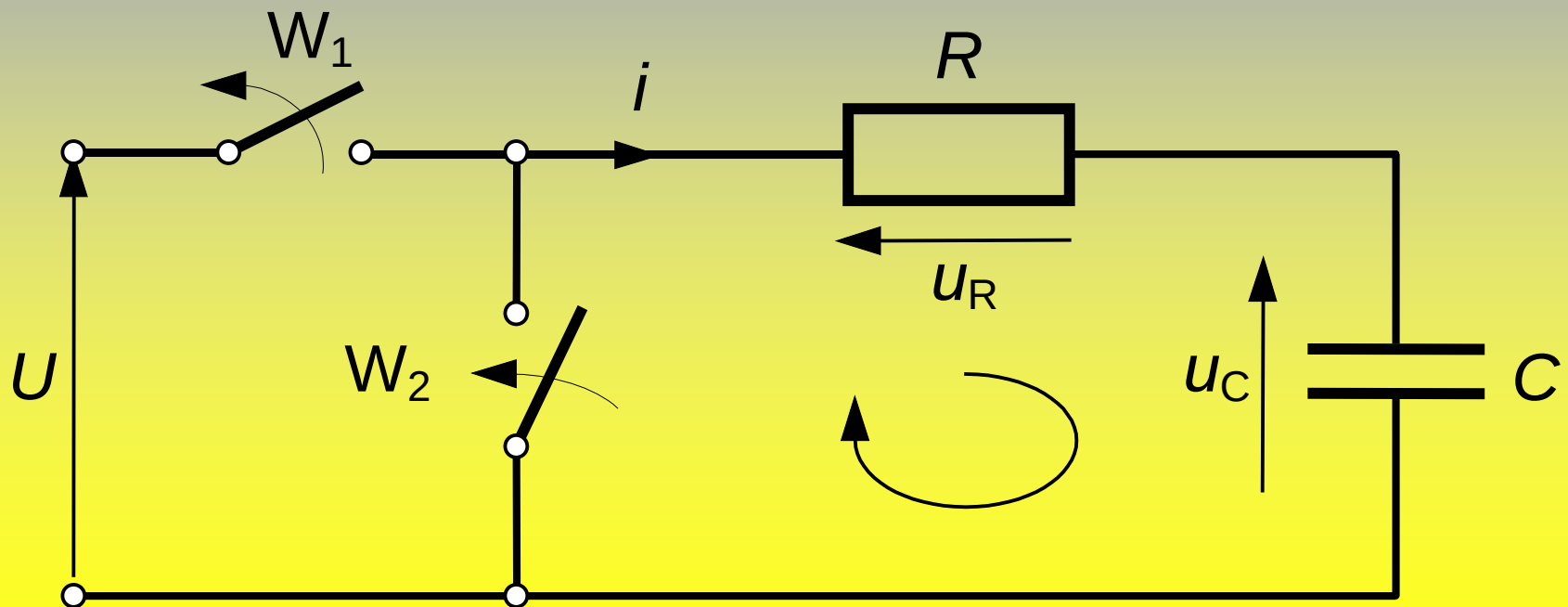


Elektrodynamika.

Prąd stały

Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC przy wymuszeniu stałym

Rozładowanie kondensatora



Elektrodynamika.

Prąd stały

**Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC
przy wymuszeniu stałym**

$$u_C + Ri = 0 \Rightarrow u_C = -Ri = -RC \frac{du_C}{dt}$$

$$\frac{du_C}{u_C} = -\frac{dt}{T} \Rightarrow \ln u_C = -\frac{t}{T} + A$$

$$u_C = Be^{-\frac{t}{T}}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC przy wymuszeniu stałym

Warunek początkowy: $t = 0 \Rightarrow u_C(0) = U$

$$B = U$$

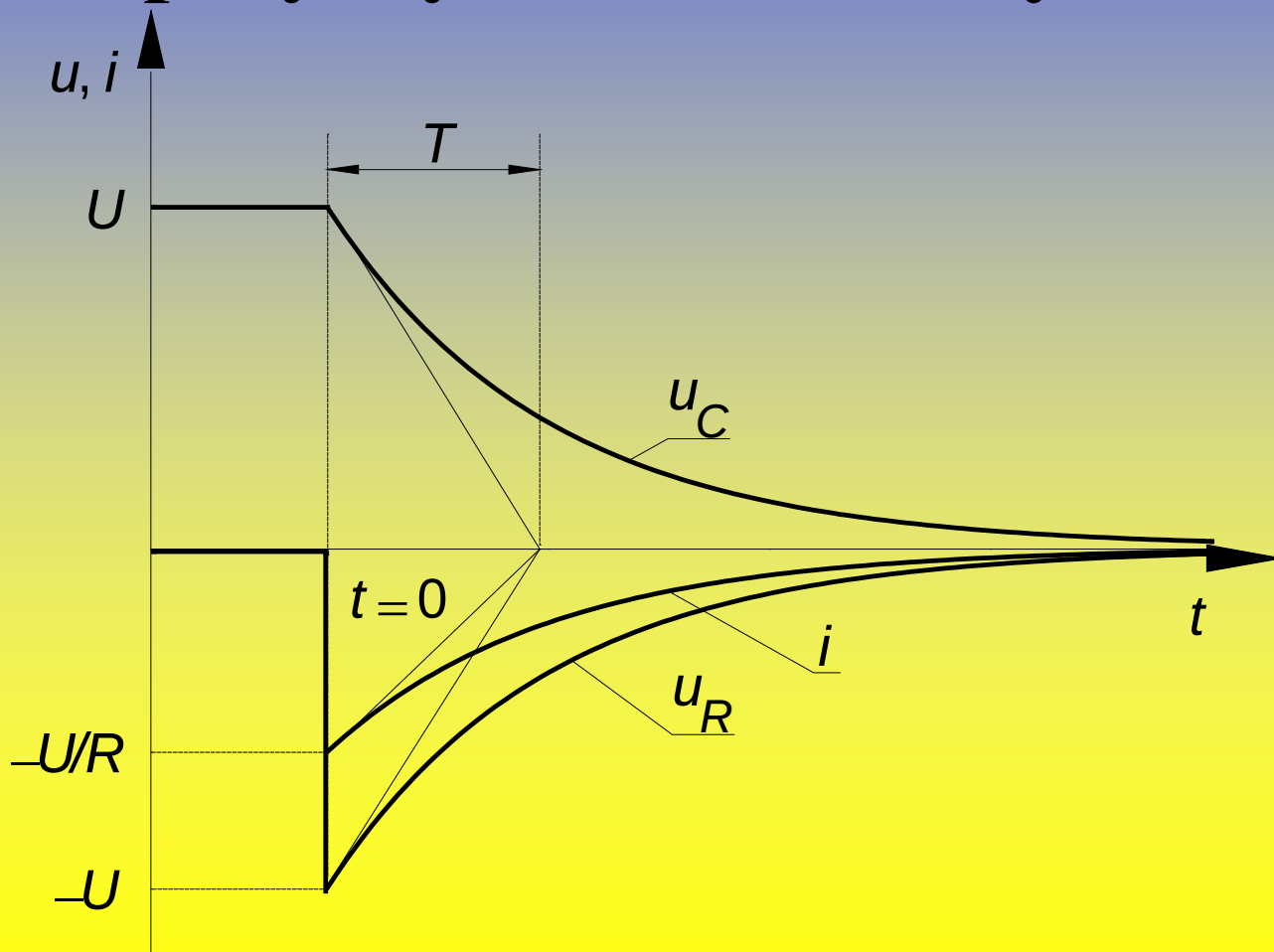
$$u_C = Ue^{-\frac{t}{T}}$$

$$i = -\frac{u_C}{R} = -\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{T}}$$

Elektrodynamika.

Prąd stały

Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC przy wymuszeniu stałym



Elektrodynamika.

Prąd stały

Stan przejściowy w gałęzi szeregowej RC przy wymuszeniu stałym

Energia wydzielona na rezystorze

$$W = \int_0^{\infty} Ri^2 dt = \int_0^{\infty} R \left(-\frac{U}{R} e^{-\frac{t}{T}} \right)^2 dt = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} Cu_C(0)^2$$

