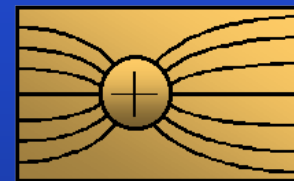




Politechnika Wrocławska



Wydział Mechaniczno-Energetyczny



Podstawy elektrotechniki

Prof. dr hab. inż. Juliusz B. Gajewski, prof. zw. PWr

Wybrzeże S. Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

Bud. A4 „Stara kotłownia”, pokój 359

Tel.: 71 320 3201

Fax: 71 328 3218

E-mail: juliusz.b.gajewski@pwr.edu.pl

Internet: www.itcmp.pwr.wroc.pl/elektra

Napięcie przemienne sinusoidalne

N a p i ę c i e m p r z e m i e n n y m nazywa się takie napięcie okresowo zmienne, którego wartość i kierunek jest okresową funkcją czasu oraz wartość średnia całookresowa jest równa zeru. Przebiegi czasowe napięć okresowo zmiennych mogą być na przykład *trójkątne*, *prostokątne*, *sinusoidalne*. Cechą charakterystyczną jest cykl zmian powtarzający się w ciągu czasu T , zwanego okresem. Odwrotnością okresu jest częstotliwość napięcia f .

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

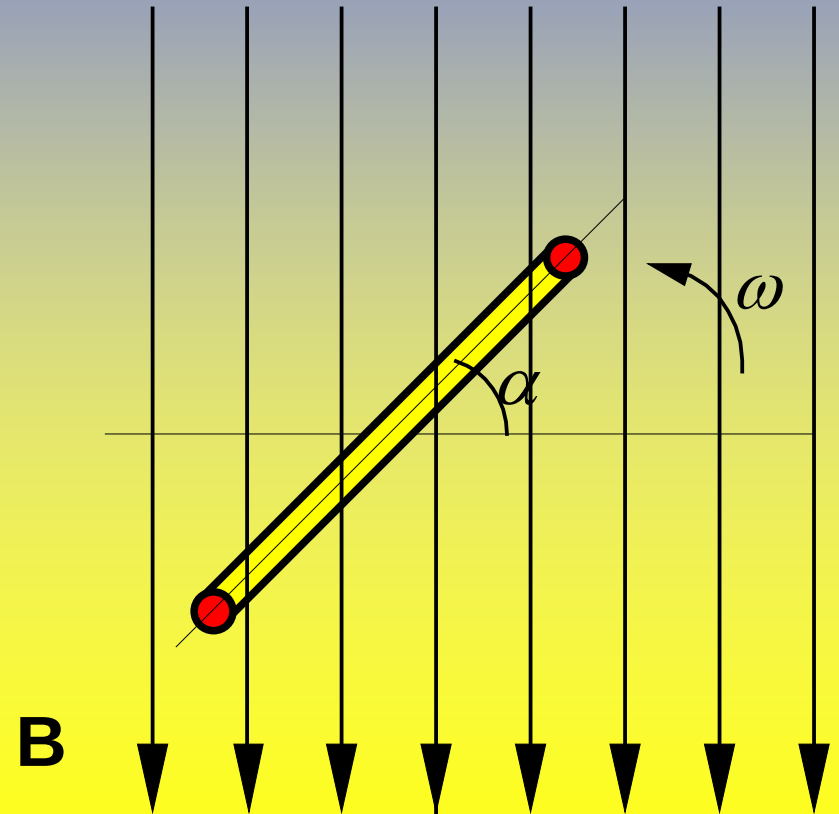
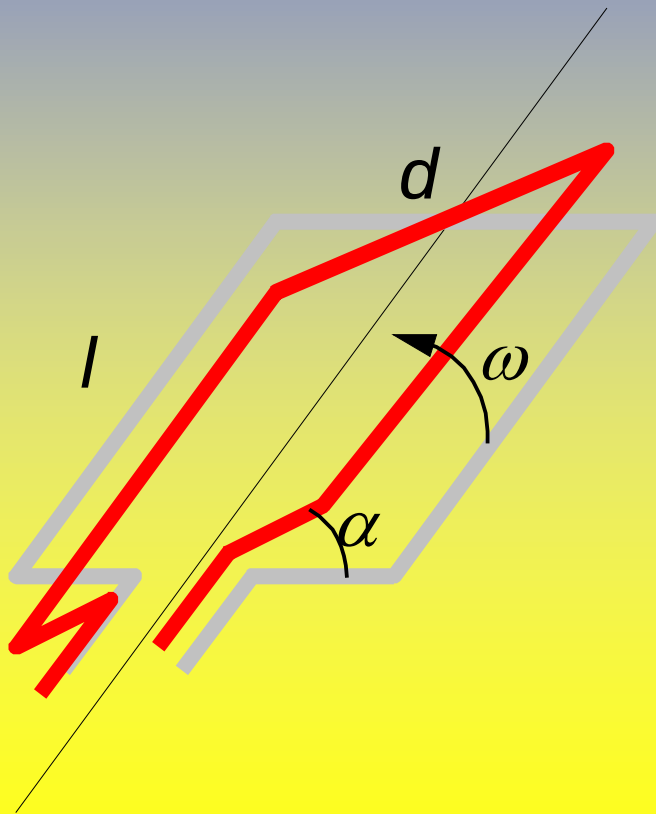
f — częstotliwość napięcia [Hz]

T — okres [s]

ω — prędkość kątowna wirowania wektora siły elektromotorycznej E_m [$\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$] albo inaczej pulsacja napięcia [1/s]

Napięcie przemienne sinusoidalne

Wytwarzanie napięcia przemiennego sinusoidalnego



Napięcie przemienne sinusoidalne

Wytwarzanie napięcia przemiennego sinusoidalnego

$B = \text{var}$

$$e = Blv$$

$$B = B_m \sin \alpha$$

$$e = B_m l v \sin \alpha = E_m \sin \alpha$$
$$= E_m \sin \omega t$$

$B = \text{const}$

$$\Phi_m = Bld$$

$$\Phi = Bld \cos \alpha = \Phi_m \cos \omega t$$

$$e = -z \frac{d\Phi}{dt} = -z \frac{d(\Phi_m \cos \omega t)}{dt}$$
$$= z \omega \Phi_m \sin \omega t = E_m \sin \omega t$$

$$i = \frac{e}{R} = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Wytwarzanie napięcia przemiennego sinusoidalnego

$$u(t) = e(t), \text{ a stąd } U_m = E_m$$

$$u = u(t) = U_m \sin \omega t$$

Ogólnie

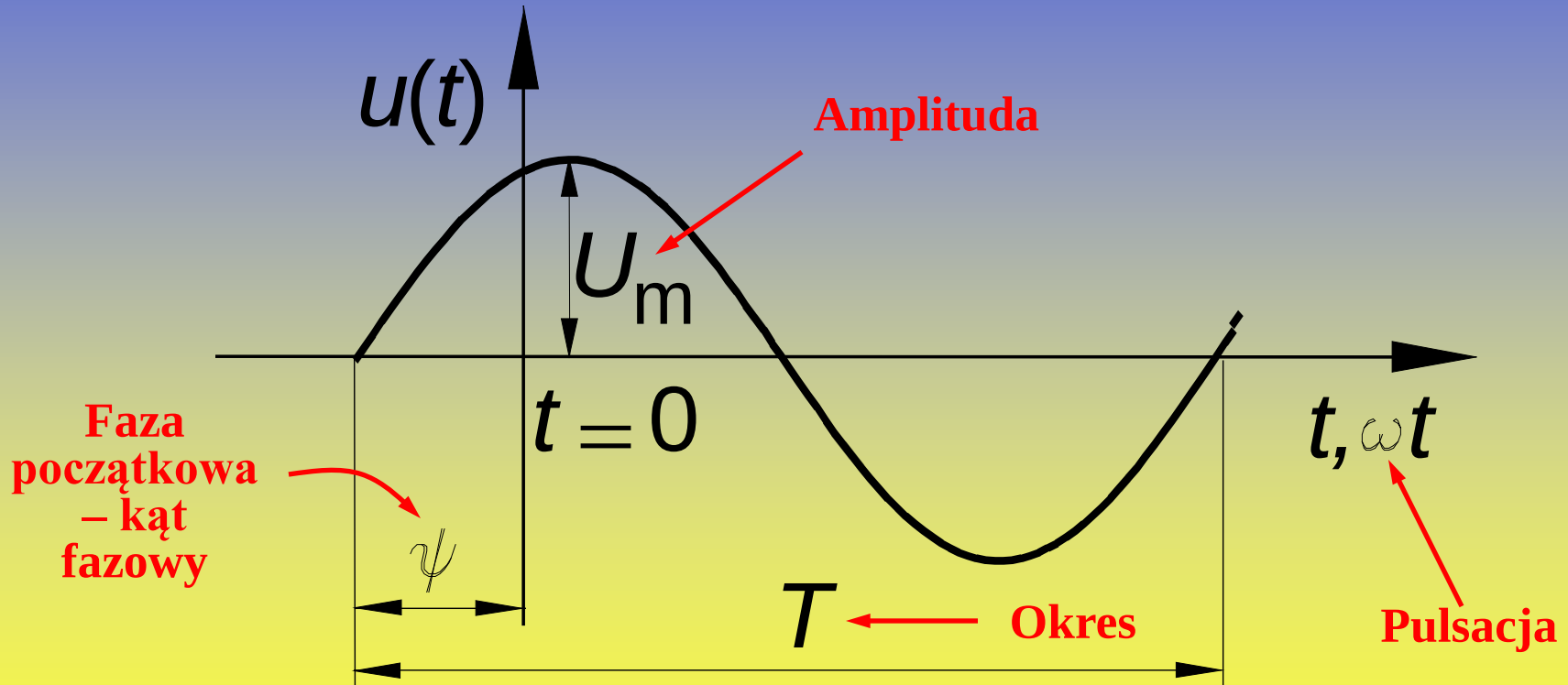
$$u = u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

ω — pulsacja napięcia [1/s]

ψ — kąt fazowy albo faza początkowa [rad]

Napięcie przemienne sinusoidalne

Wytwarzanie napięcia przemiennego sinusoidalnego



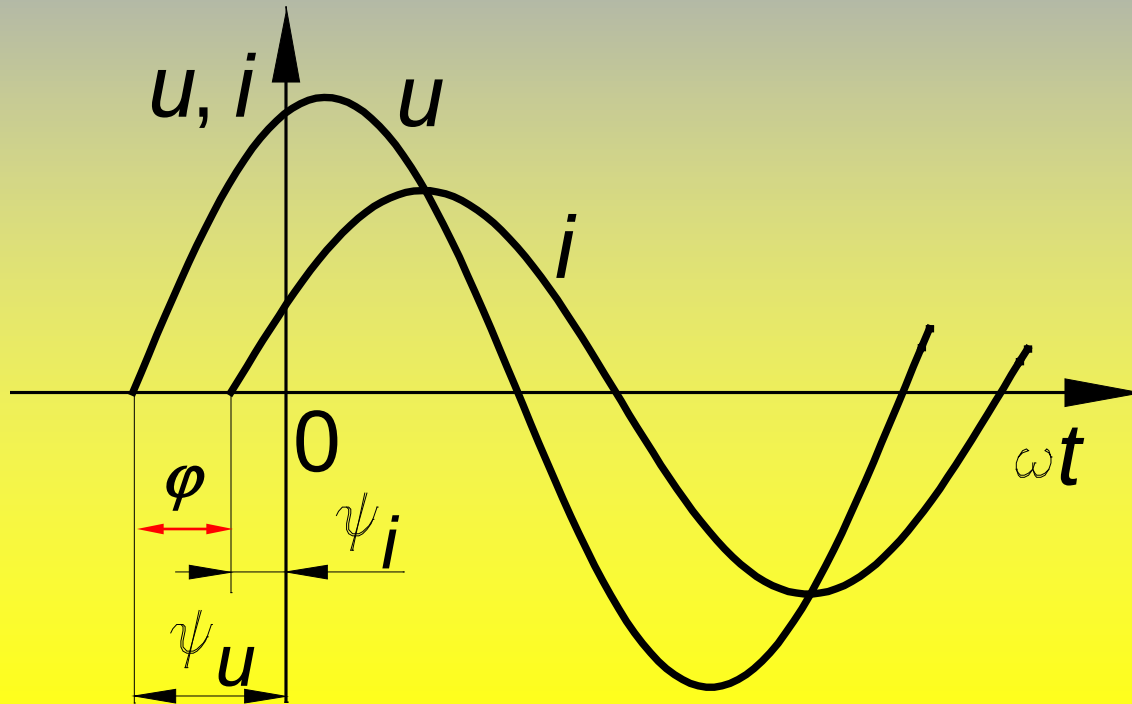
Wniosek: Zmienne wielkości fizyczne sinusoidalne można jednoznacznie przedstawiać lub określać za pomocą trzech wielkości: amplitudy, częstotliwości i fazy początkowej — kąta fazowego.

Napięcie przemienne sinusoidalne

Przesunięcie fazowe

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \wedge i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

$$\varphi = \omega t + \psi_u - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i$$



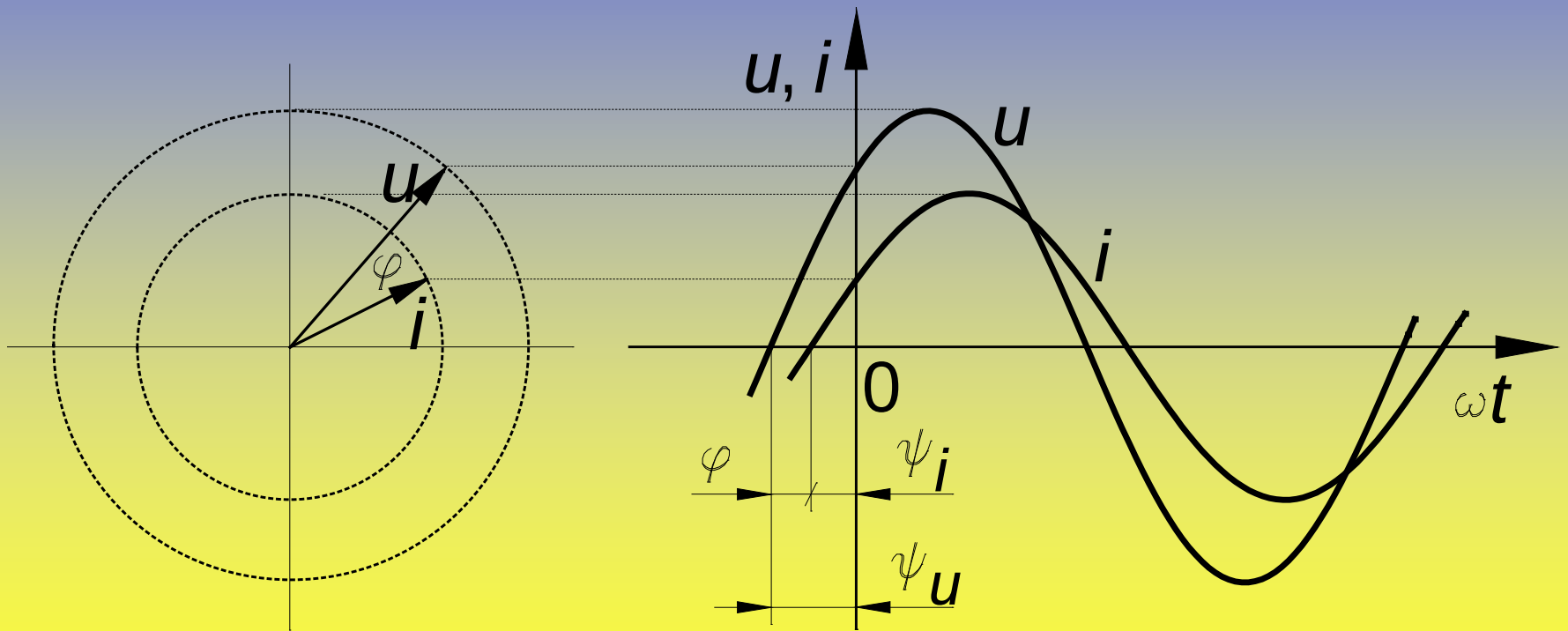
Napięcie przemienne sinusoidalne

Napięcie i prąd sinusoidalnie zmienny jako wektory wirujące

Każdą wielkość sinusoidalnie zmienną można przedstawić jako **w e k t o r w i r u j ą c y**, niezależnie od przebiegu czasowego. Wektor taki obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół swego punktu początkowego, a jego moduł (długość wektora) jest równy amplitudzie wielkości sinusoidalnej. Oś odniesienia jest oś odciętych, dodatni kierunek wirowania jest przeciwny do kierunku wskazówek zegara, a kąt, jaki tworzy wektor z osią odniesienia w chwili $t = 0$ jest równy fazie początkowej. Wektory wirujące **n i e** są wektorami w sensie fizycznym, lecz są wektorami geometrycznymi na płaszczyźnie, zmieniającymi swój kierunek z czasem. Dlatego też nazywa się je często *wektorami czasowymi*, *wskazami* albo *fazorami*.

Napięcie przemienne sinusoidalne

Napięcie i prąd sinusoidalnie zmienny jako wektory wirujące



Napięcie przemienne sinusoidalne

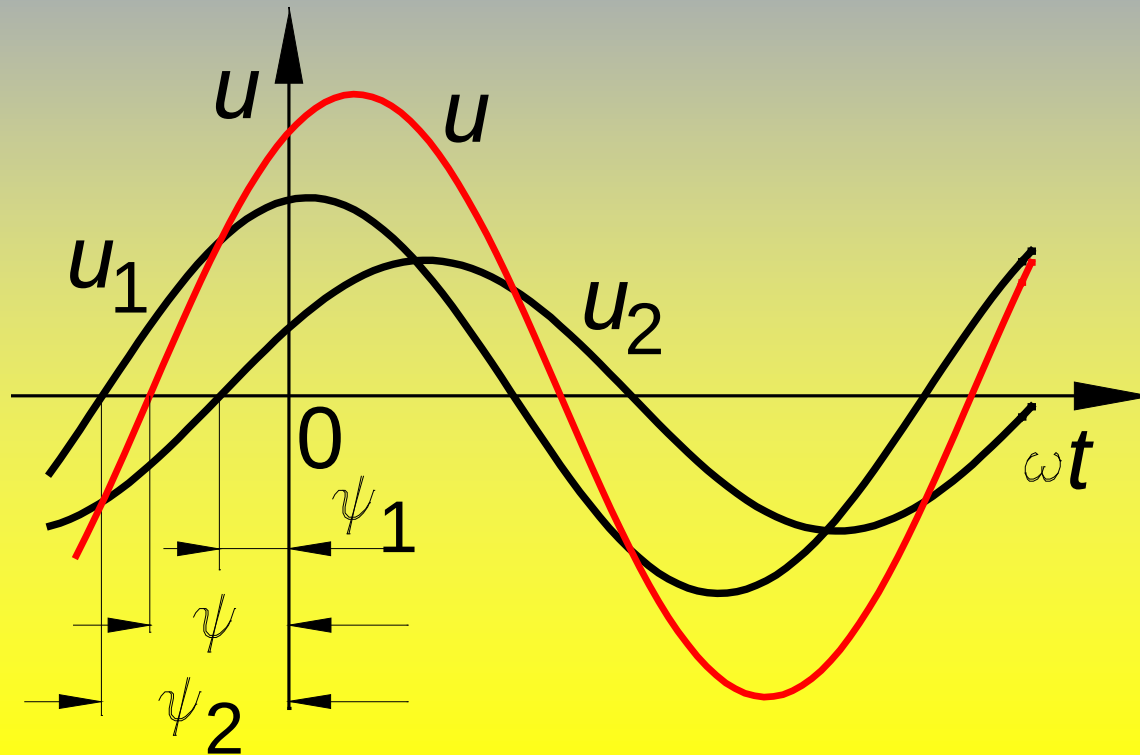
Dodawanie wielkości sinusoidalnych

$$u_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1)$$



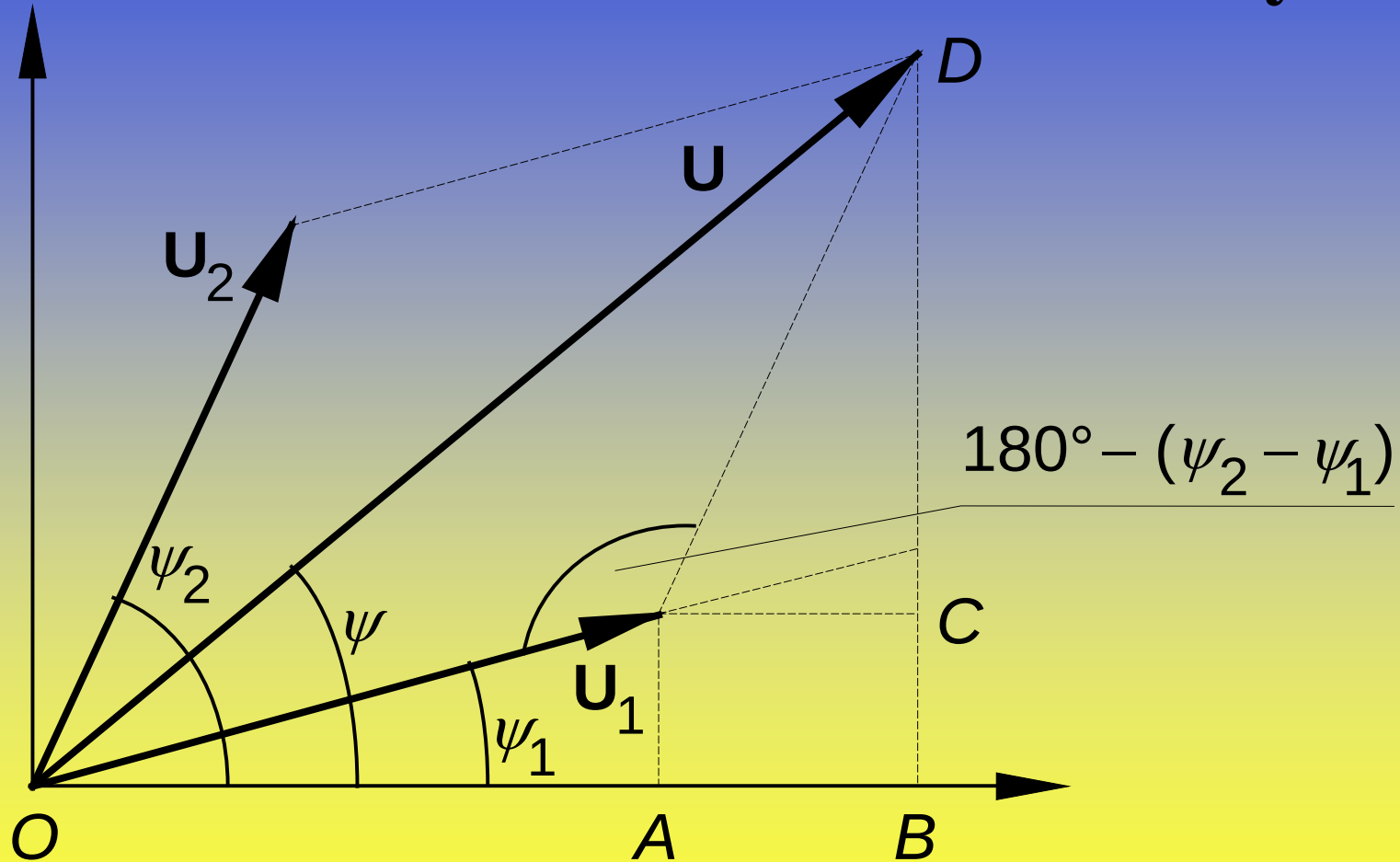
$$u = u_1 + u_2 = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

$$u_2 = U_{2m} \sin(\omega t + \psi_2)$$



Napięcie przemienne sinusoidalne

Dodawanie wielkości sinusoidalnych



$$U = U_1 + U_2$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Dodawanie wielkości sinusoidalnych

$$U_m = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 - 2U_{1m}U_{2m} \cos[180^\circ - (\psi_2 - \psi_1)]}$$
$$= \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2U_{1m}U_{2m} \cos(\psi_2 - \psi_1)}$$

Wzór Carnota

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\overline{BC} + \overline{CD}}{\overline{OA} + \overline{AB}} = \operatorname{arctg} \frac{U_1 \sin \psi_1 + U_2 \sin \psi_2}{U_1 \cos \psi_1 + U_2 \cos \psi_2}$$

$$u = u_1 + u_2 = U_m \sin(\omega t + \psi)$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Wartość średnia prądu (napięcia) przemienne

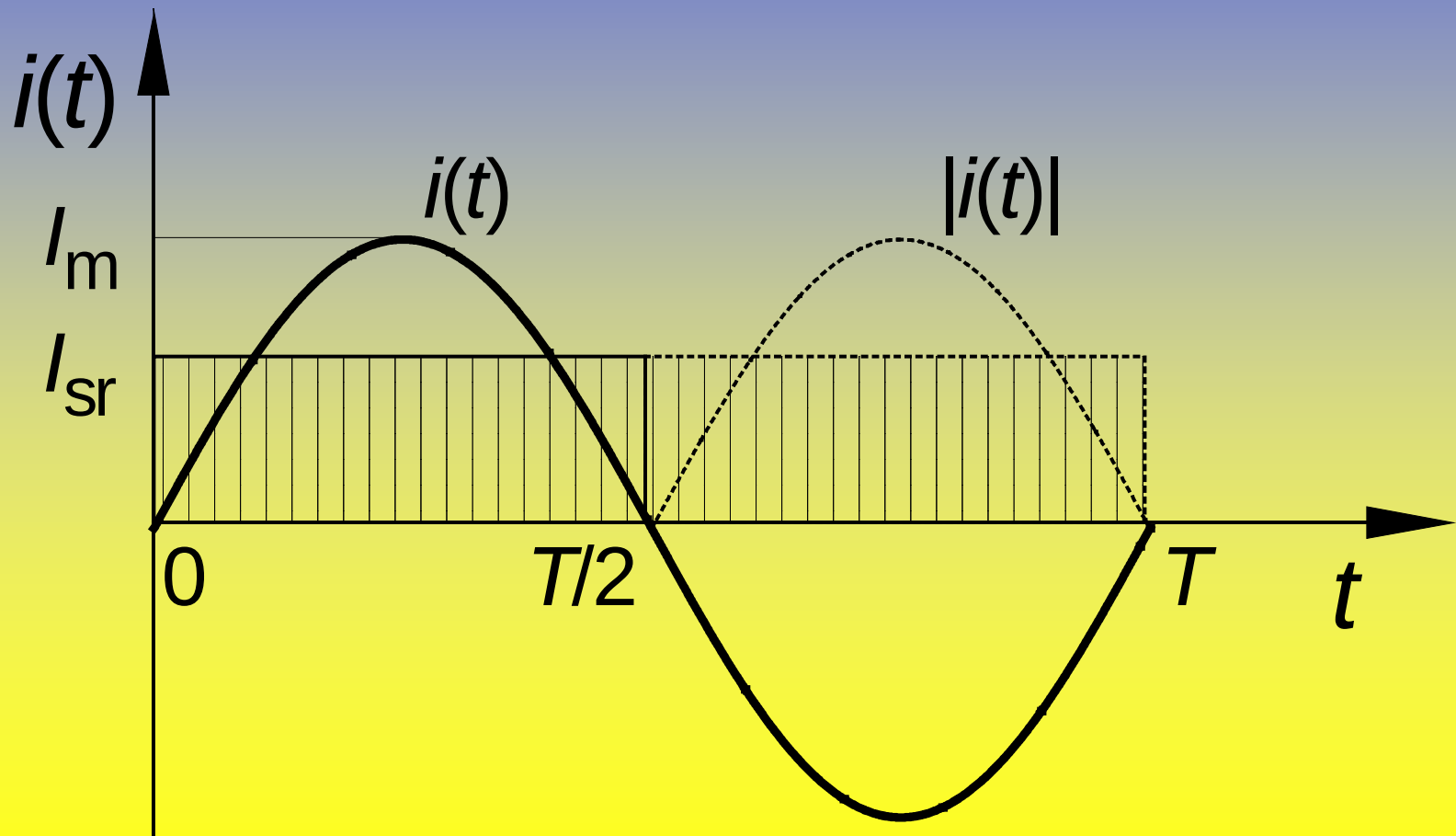
$$Q_{T/2} = \int_0^{T/2} i dt$$

$$Q_{T/2} = I_{\text{sr}} \frac{T}{2}$$

$$I_{\text{sr}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_{\text{m}} \sin \omega t dt = \frac{2}{\pi} I_{\text{m}} \approx 0.637 I_{\text{m}}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Wartość średnia prądu (napięcia) przemienne



Napięcie przemienne sinusoidalne

Wartość skuteczna prądu (napięcia) przemienne

$$dA = i^2 R dt$$

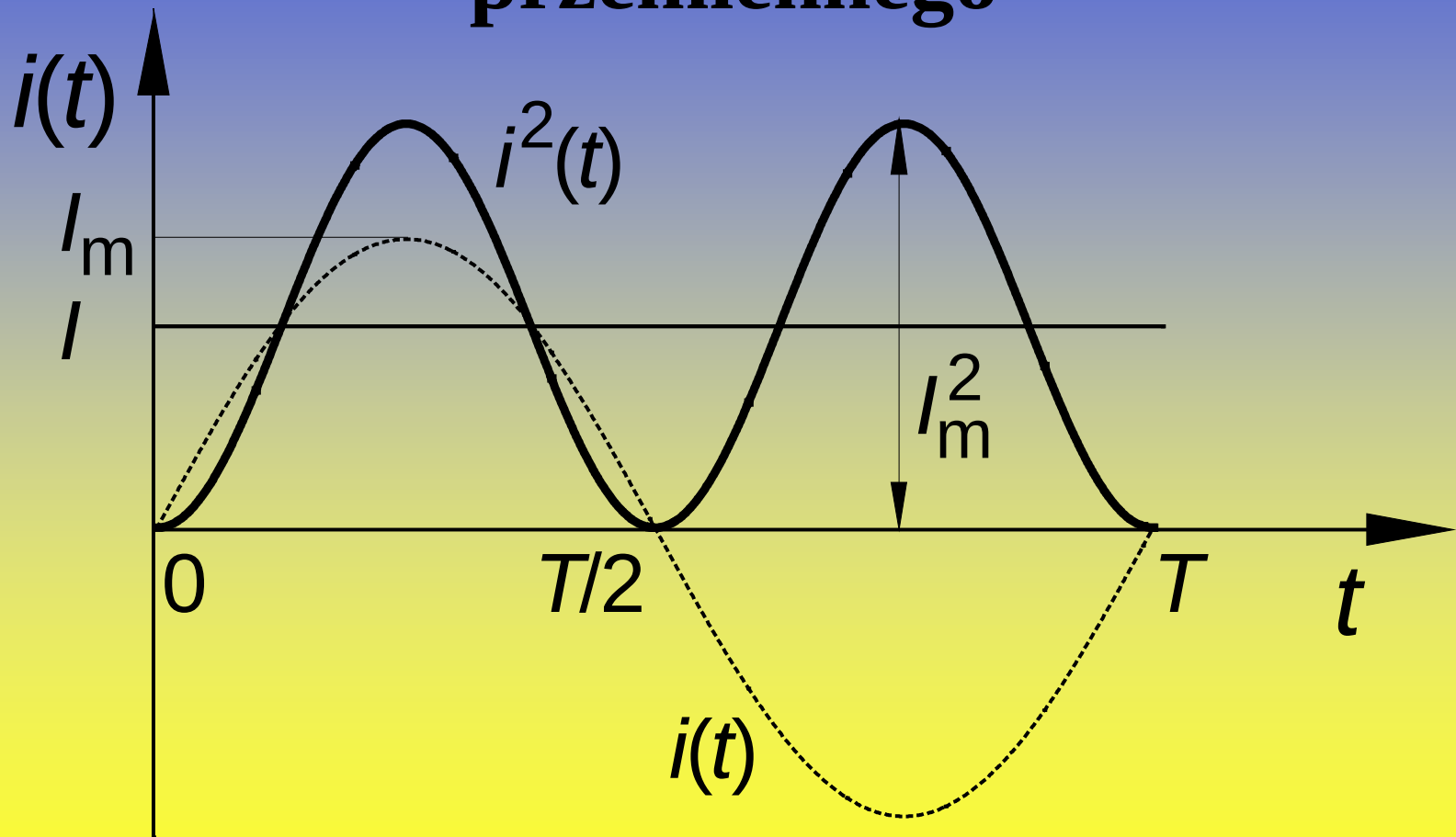
$$A_T = \int_0^T R i^2 dt = R \int_0^T i^2 dt$$

$$A_T = I^2 R T$$

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 I_m$$

Napięcie przemiennie sinusoidalne

Wartość skuteczna prądu (napięcia)
przemiennego



$$U = U_m / \sqrt{2} \quad \text{ i } \quad E = E_m / \sqrt{2}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Współczynniki szczytu i kształtu

Współczynnik szczytu

$$k_s = \frac{I_m}{I} = \frac{U_m}{U} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

Współczynnik kształtu

$$k_k = \frac{I}{I_{sr}} = \frac{U}{U_{sr}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1.11$$

Napięcie przemienné sinusoidalne

Moc prądu przemiennego

Rezystancja R

Założenia:

$$R = \text{const}, L = C = 0$$

$$p = ui \quad \leftarrow \text{moc chwilowa}$$

$$u = U_m \sin \omega t \quad \wedge \quad i = I_m \sin \omega t \quad \Leftrightarrow \quad u = Ri \quad \wedge \quad U_m = RI_m$$

$$p = U_m I_m \sin^2 \omega t = P_m \sin^2 \omega t$$

$$P_m = U_m I_m$$

$$A_T = \int_0^T p dt$$

$$A_T = PT$$



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P_m \sin^2 \omega t dt$$

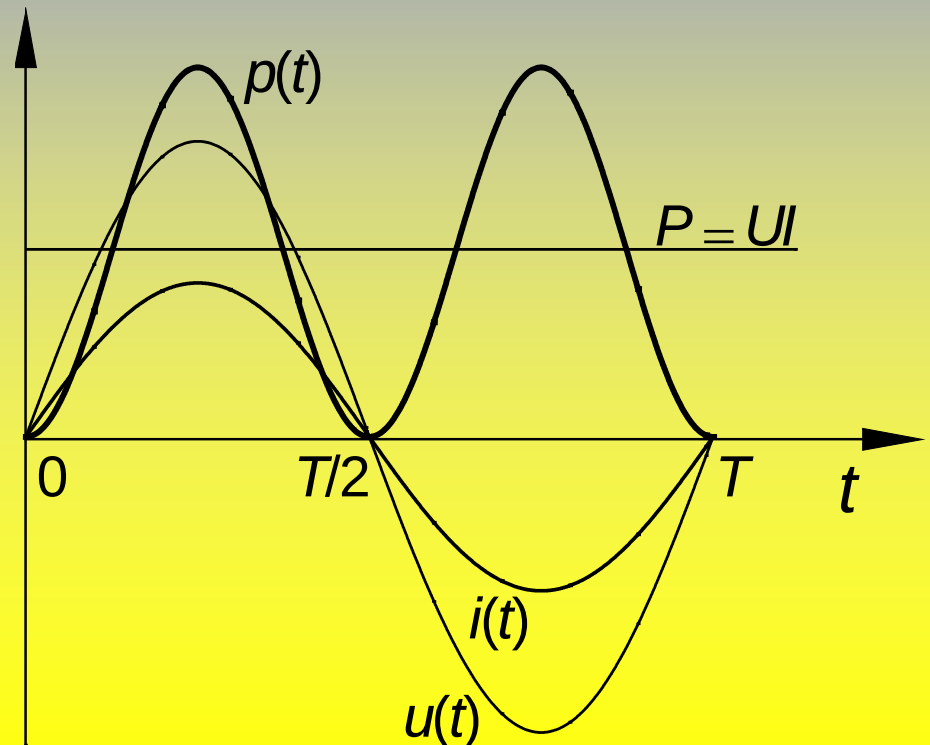
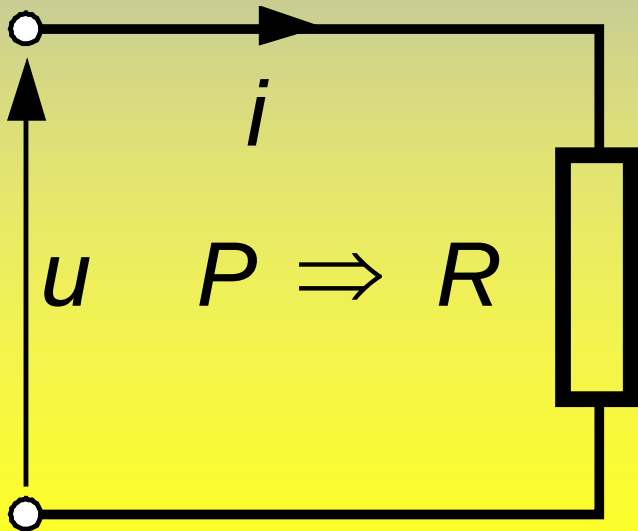
Napięcie przemiennne sinusoidalne

Moc prądu przemiennego

$$P = \frac{P_m}{2} \Rightarrow P = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \frac{I_m}{\sqrt{2}} = UI$$

Moc czynna

$$[P] = W$$



Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Indukcyjność L

Założenia:

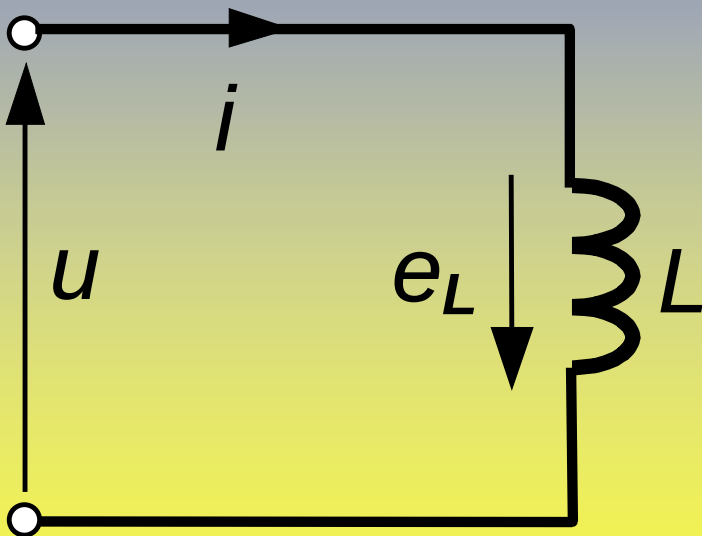
$$L = \text{const}, R = C = 0 \quad \wedge \quad i = I_m \sin \omega t$$

$$\Phi_i = \frac{zi}{R_\mu} = \frac{zI_m}{R_\mu} \sin \omega t = \Phi_m \sin \omega t$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Indukcyjność L



$$u + e_L = 0 \Rightarrow u = -e_L$$

$$e_L = -z \frac{d\Phi_i}{dt} = -L \frac{di}{dt} = -I_m \omega L \cos \omega t = I_m \omega L \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Indukcyjność L

$$e_L = E_{L_m} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$u + e_L = 0 \Rightarrow u = -e_L$$

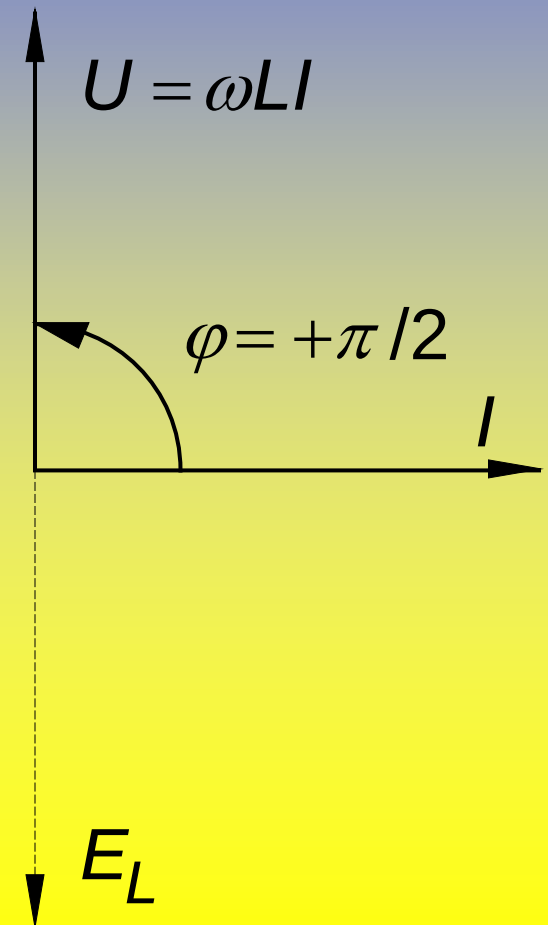
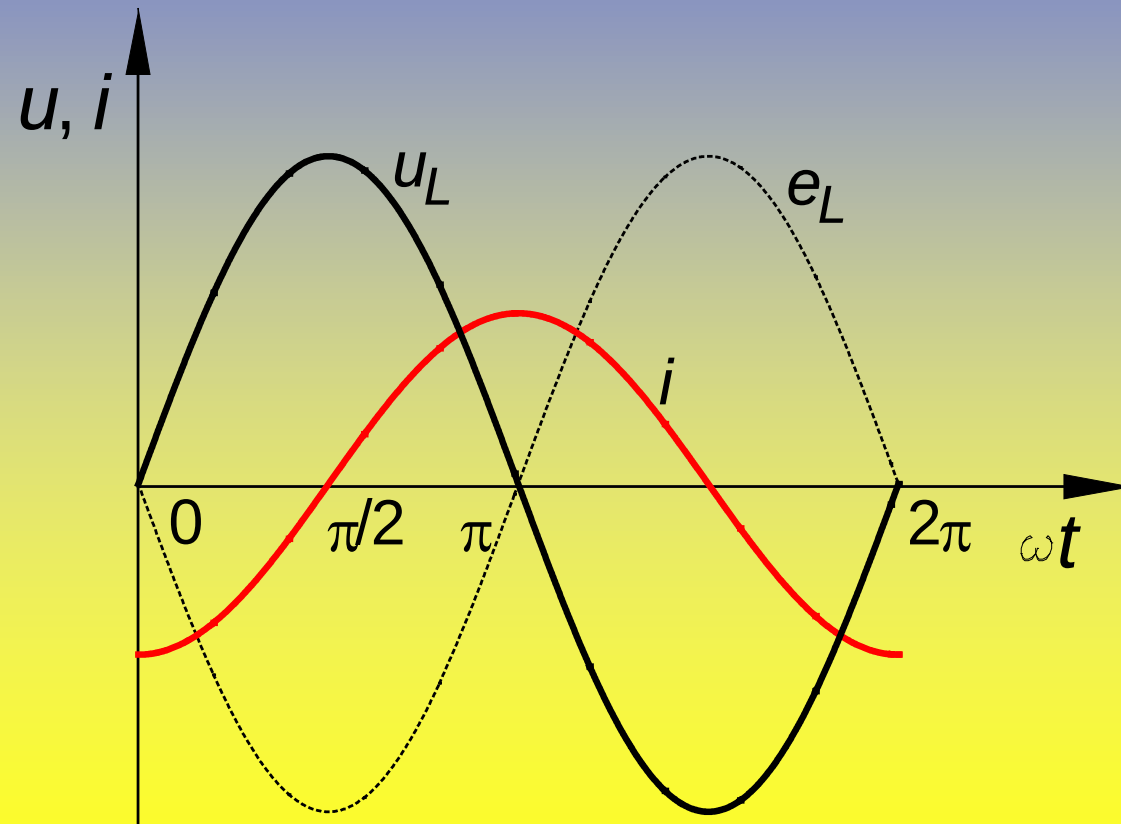
$$u = I_m \omega L \cos \omega t = I_m \omega L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Wniosek: Napięcie na cewce wyprzedza prąd o $\pi/2$ (90°)

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Indukcyjność L



Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Indukcyjność L

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \omega L \Rightarrow U = I \omega L$$

$$X_L = \omega L$$

$$U = I X_L \Rightarrow I = \frac{U}{X_L}$$

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

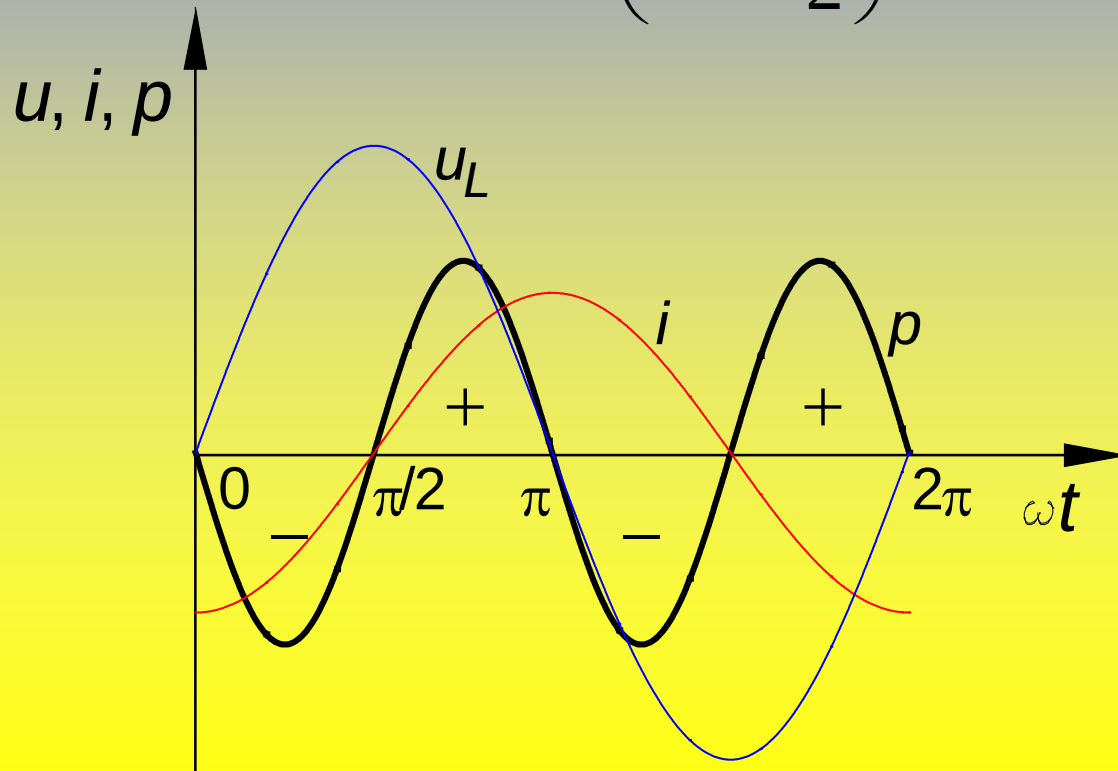
$$[X_L] = [\omega] [L] = \Omega = (1 \text{ s})^{-1} \cdot 1 \text{ H} = (1 \text{ s})^{-1} \cdot (\Omega \cdot \text{s})$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Indukcyjność L

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = UI \sin 2\omega t$$



Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Indukcyjność L

W odbiorniku czysto indukcyjnym L (bez rezystancji R i pojemności C) zachodzi okresowa wymiana energii między odbiornikiem i źródłem zasilania bez jednokierunkowego przepływu energii połączonego z nieodwracalną przemianą energii elektrycznej w inną postać energii, np. ciepłą, jak w odbiorniku rezystancyjnym.

Wskutek tego energia elektryczna pobierana przez odbiornik indukcyjny w ciągu danego czasu, składającego się z pewnej liczby okresów, wyrażona w dżulach, równa się $z e r u$, oraz moc elektryczna, równa energii pobieranej w ciągu jednostki czasu, wyrażona w watach, również jest równa $z e r u$. Jednakże wskutek okresowej wymiany energii przez odbiornik indukcyjny płynie *prąd bierny indukcyjny* o wartości skutecznej I , a na jego zaciskach występuje napięcie o wartości skutecznej U .

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Indukcyjność L

$$A_T = \int_0^T p dt$$

$$A_T = 0 \Rightarrow P = \frac{A_T}{T} = 0$$

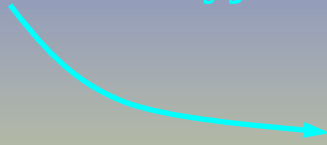
$$A_{T/4} = \int_0^{T/4} u i dt = \int_0^{T/4} L \frac{di}{dt} i dt = \int_0^{I_m} L i di = \frac{L I_m^2}{2} = W_m$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Indukcyjność L

Moc bierna indukcyjna


$$Q = UI \left(\angle \mathbf{U}, \mathbf{I} = \frac{\pi}{2} \right)$$

Energia bierna indukcyjna

$[Q] = \text{var}$


$$A_b = Qt$$

$[A_b] = \text{var} \cdot \text{s}$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Pojemność C

Założenia:

$$C = \text{const}, R = L = 0 \wedge u = U_m \sin \omega t$$

$$dq = i dt \wedge dq = C du$$

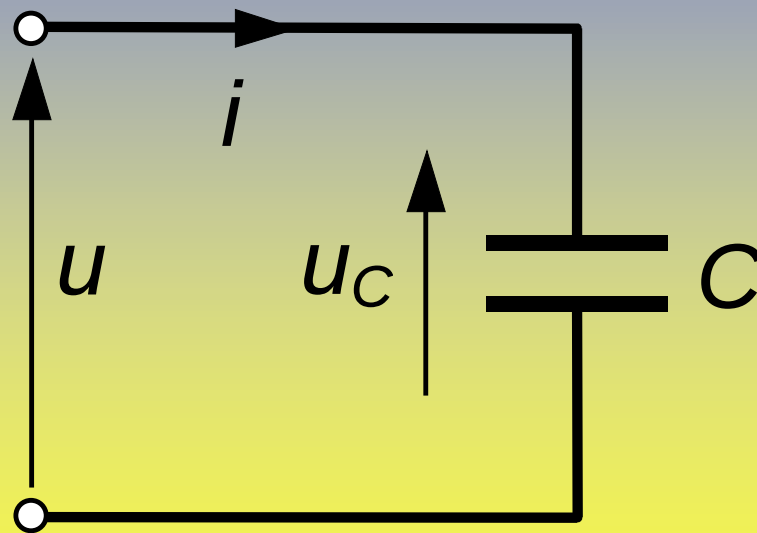
$\Downarrow$

$$i = C \frac{du}{dt}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Pojemność C



$$i = C \frac{du}{dt} = CU_m \frac{d(\sin \omega t)}{dt} = \omega C U_m \cos \omega t$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Pojemność C

$$\cos \omega t = -\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

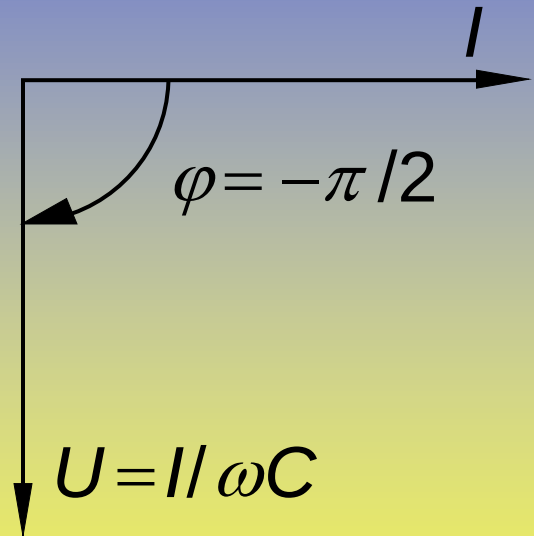
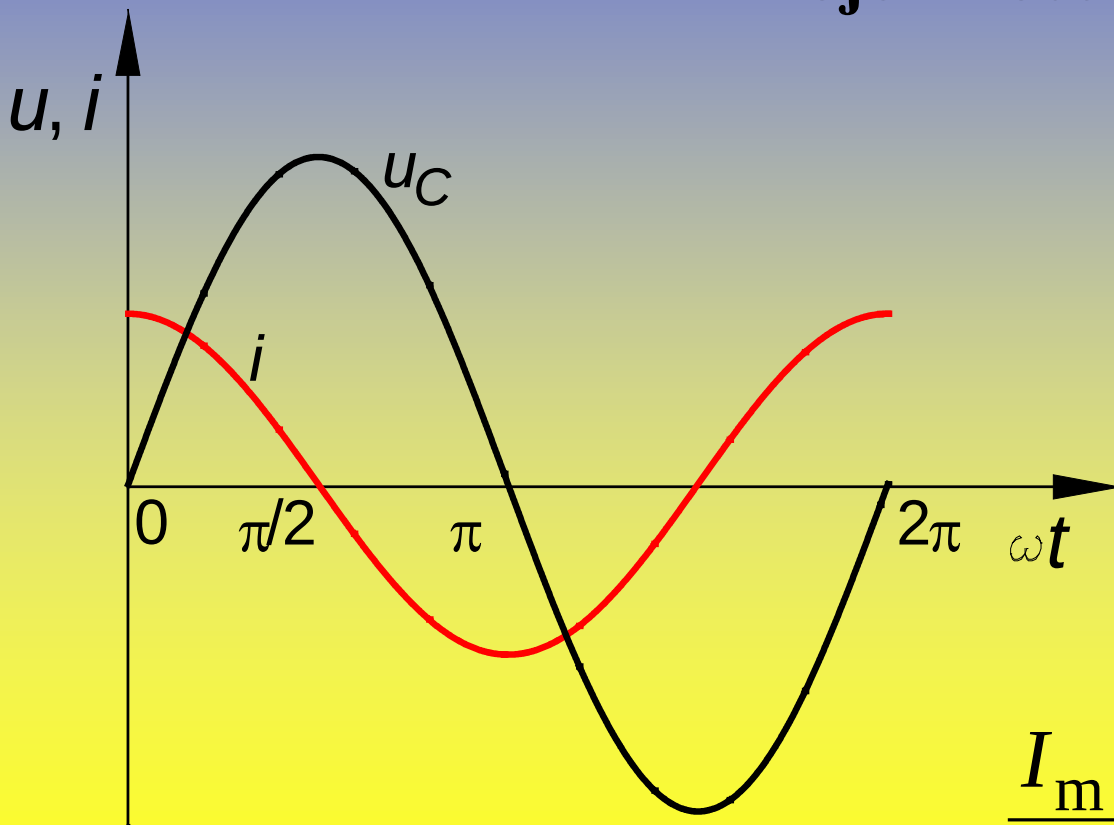
$$i = \omega C U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Wniosek: Prąd na kondensatorze wyprzedza napięcie o $\pi/2$ (90°)

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Pojemność C



$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \omega C \Rightarrow I = \omega C U$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Pojemność C

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$I = \frac{U}{X_C} \Rightarrow U = IX_C$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C}$$

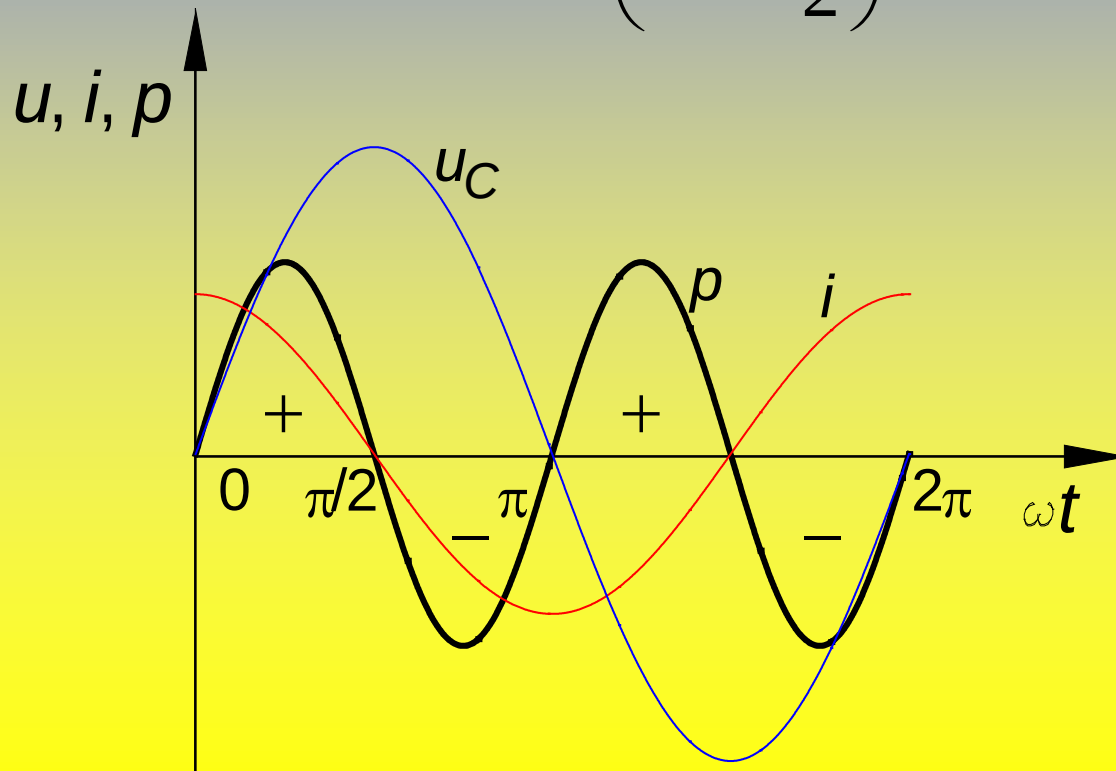
$$[X_C] = [\omega]^{-1} [C]^{-1} = \Omega = 1 \text{ s:1 F} \quad 1\text{s:1F} = 1\text{s:(1C:1V)} = 1\text{V:1A}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Pojemność C

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = UI \sin 2\omega t$$



Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Pojemność C

W odbiorniku czysto pojemnościowym C (bez rezystancji R i indukcyjności L) zachodzi okresowa wymiana energii między odbiornikiem i źródłem zasilania bez jednokierunkowego przepływu energii połączonego z nieodwracalną przemianą energii elektrycznej w inną postać energii, np. ciepłą, jak w odbiorniku rezystancyjnym.

Wskutek tego energia elektryczna pobierana przez kondensator w ciągu danego czasu, składającego się z pewnej liczby okresów, wyrażona w dżulach, równa się $z e r u$, oraz moc elektryczna, równa energii pobieranej w ciągu jednostki czasu, wyrażona w watach, również jest równa $z e r u$. Jednakże wskutek okresowej wymiany energii przez kondensator płynie stale *prąd bierny pojemnościowy* o wartości skutecznej I , a na jego zaciskach występuje napięcie o wartości skutecznej U .

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Pojemność C

$$A_T = \int_0^T p dt$$

$$A_T = 0 \Rightarrow P = \frac{A_T}{T} = 0$$

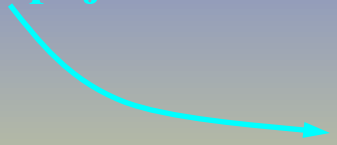
$$A_{T/4} = \int_0^{T/4} u i dt = \int_0^{T/4} u C \frac{du}{dt} dt = \int_0^{U_m} C u du = \frac{C U_m^2}{2} = W_e$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Pojemność C

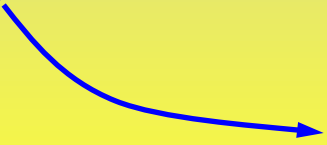
Moc bierna pojemnościowa


$$Q_c = UI \left(\angle \mathbf{U}, \mathbf{I} = \frac{\pi}{2} \right)$$

$$Q_c = \omega C U^2$$

Energia bierna pojemnościowa

$[Q_c] = \text{var}$


$$A_b = Q_c t$$

$[A_b] = \text{var} \cdot \text{s}$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Z j a w i s k o r e z o n a n s u występuje w różnych układach fizycznych i pojawia się, gdy układ jest poddany pobudzeniom o k r e s o w y m o częstotliwości równej częstotliwości drgań s w o b o d n y c h układu.

R e z o n a n s powstaje tylko wtedy, gdy odpowiedź przejściowa układu ma charakter o s c y l a c y j n y, a to wymaga magazynowania przez układ dwóch rodzajów energii: *pola elektrycznego* i *pola magnetycznego*. Obwód rezonansowy (oscylacyjny) musi zawierać elementy pasywne magazynujące energię, czyli konserwatywne, tj. i n d u k c y j n o ś ć i p o j e m n o ś ć.

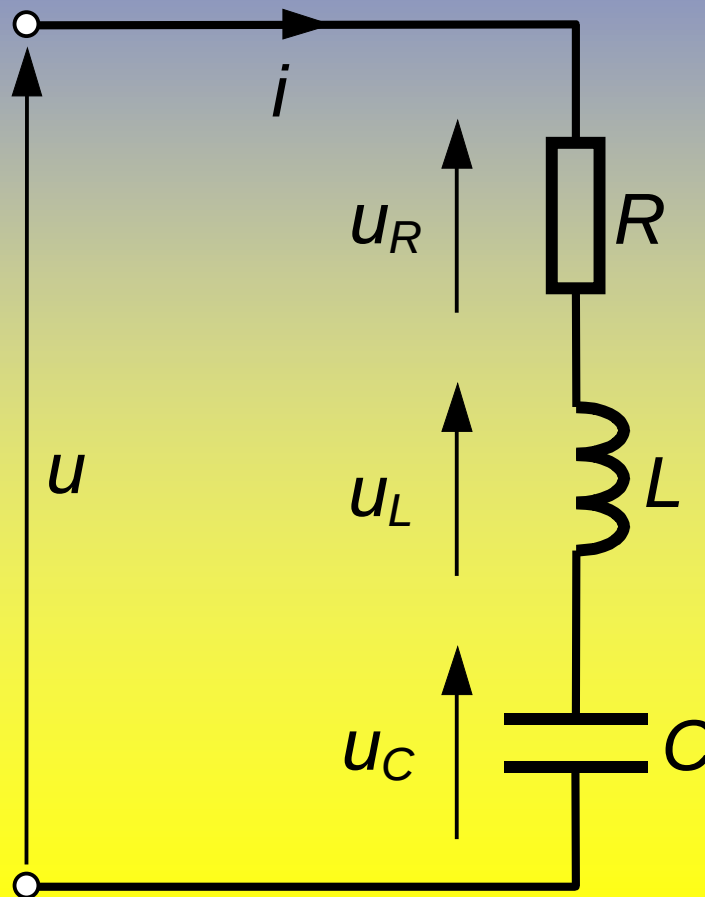
W zależności od sposobu połączenia elementów L i C ze źródłem energii możliwe są dwa przypadki rezonansu:

- s z e r e g o w e połączenie powoduje rezonans n a p i ę ć;
- r ó w n o l e g ł e połączenie powoduje rezonans p r ą d ó w.

Napięcie przemiennie sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Szeregowe połączenie R , L i C



Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Szeregowe połączenie R , L i C

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

$$U_R = RI; U_L = X_L I = \omega L I; U_C = X_C I = \frac{1}{\omega C} I$$

$$i = I_m \sin \omega t$$

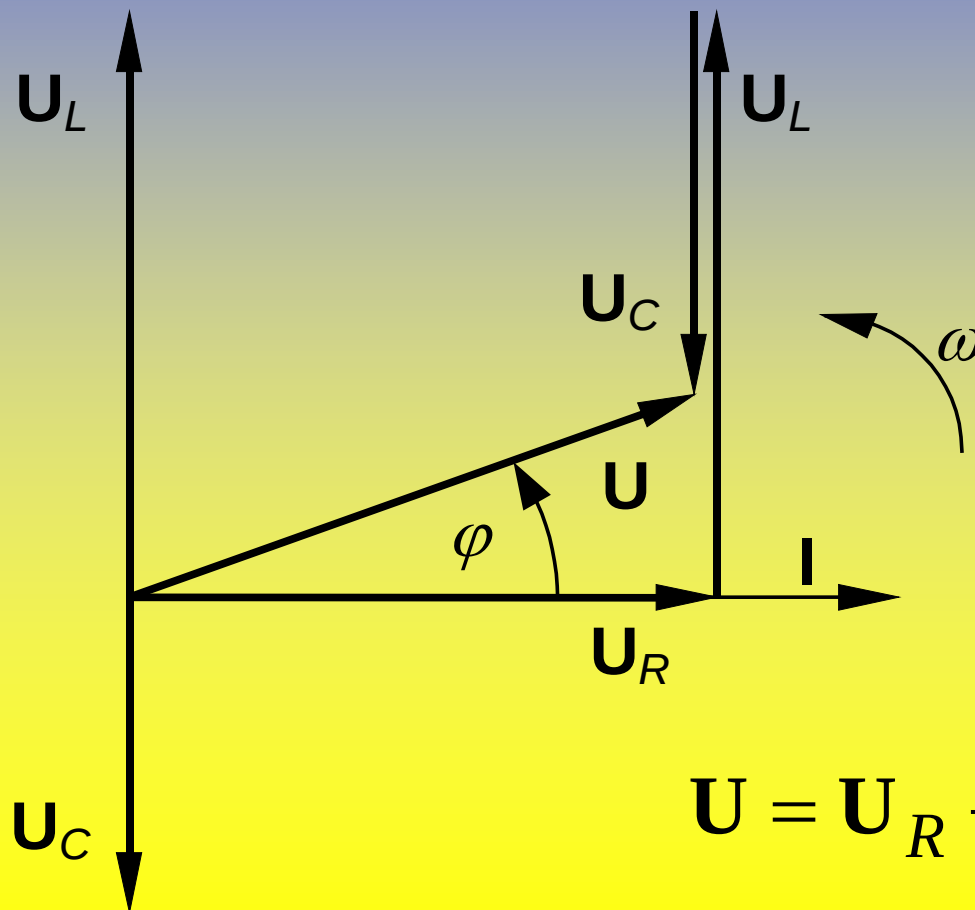
$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)?$$

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}; I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Napięcie przemiennie sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Szeregowe połączenie R , L i C



Napięcie przemiennie sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Szeregowe połączenie R , L i C

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2} = \sqrt{(RI)^2 + \left(\omega LI - \frac{1}{\omega C} I\right)^2} \\ &= I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = I \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = IZ \end{aligned}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Szeregowe połączenie R , L i C

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

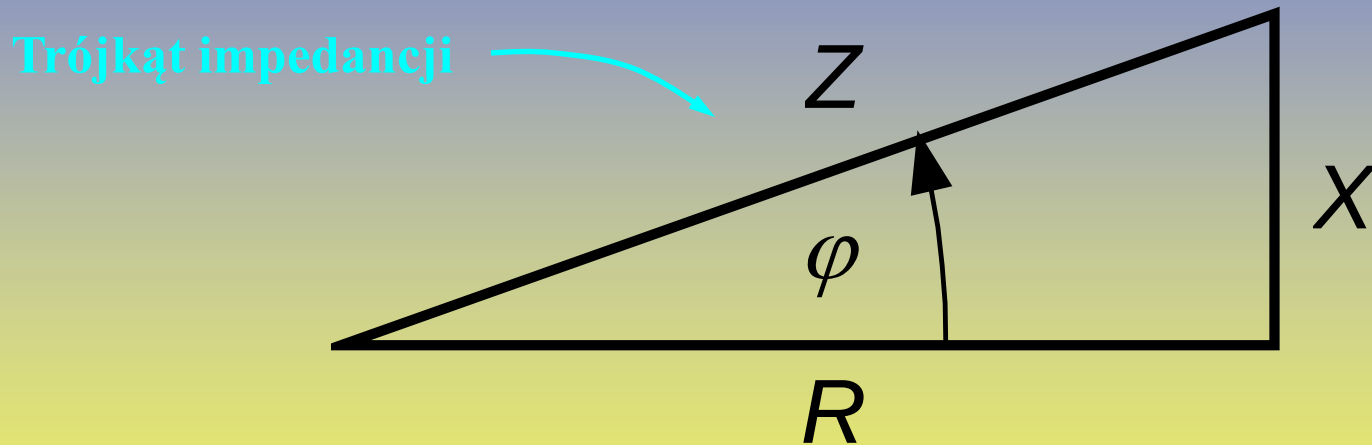
Z — impedancja, opór pozorny, zawada [Ω]

X — reaktancja wypadkowa, opór bierny [Ω]

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Szeregowe połączenie R , L i C



$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Napięcie przemiennie sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Szeregowe połączenie R , L i C

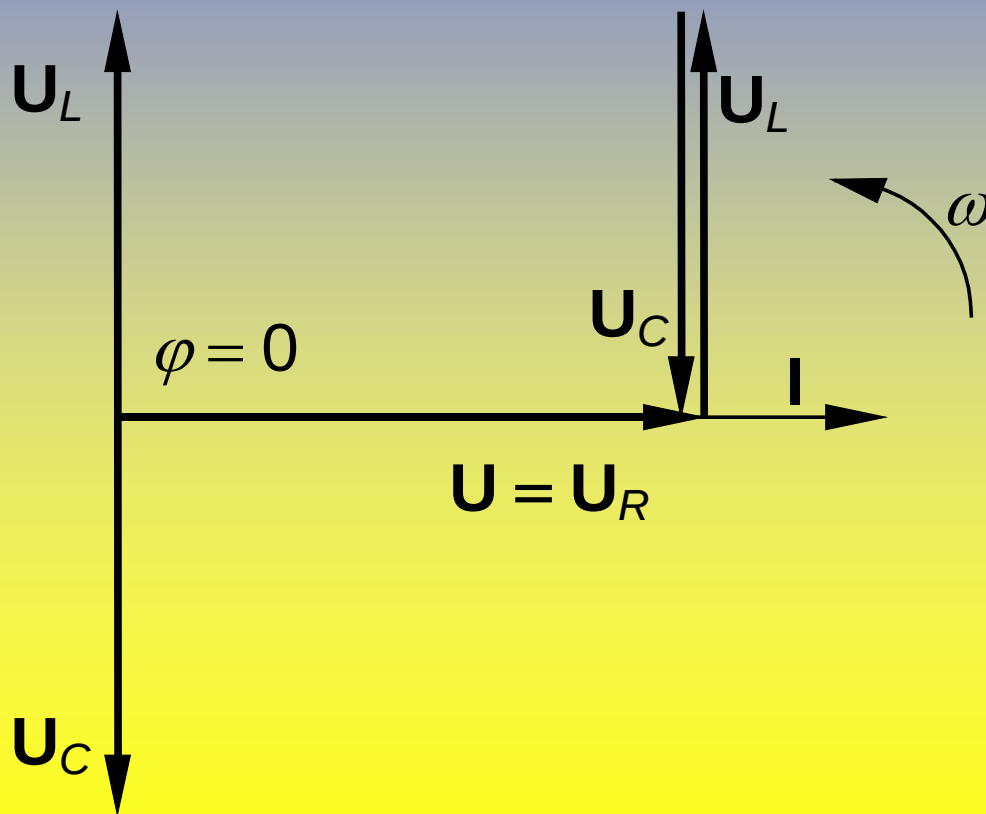
$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

- $X > 0 \Leftrightarrow X_L > X_C \Rightarrow \varphi = \psi_u - \psi_i > 0$ — charakter **indukcyjny**;
- $X < 0 \Leftrightarrow X_L < X_C \Rightarrow \varphi = \psi_u - \psi_i < 0$ — charakter **pojemnościowy**;
- $X = 0 \Leftrightarrow X_L = X_C \Rightarrow \varphi = \psi_u - \psi_i = 0 \wedge U_L = U_C$ — charakter **rezystancyjny** $\rightarrow$ **r e z o n a n s n a p i ę ć**.

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Szeregowe połączenie R , L i C



$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

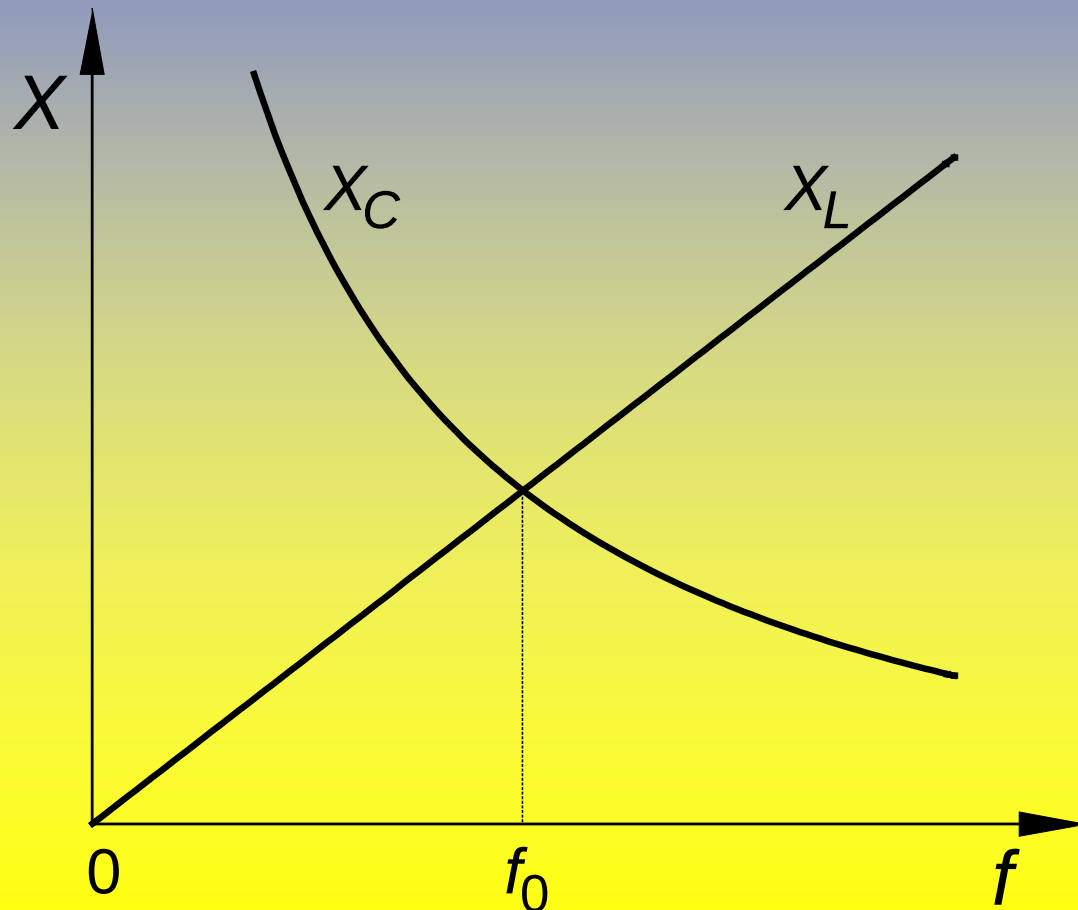


$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Napięcie przemiennie sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

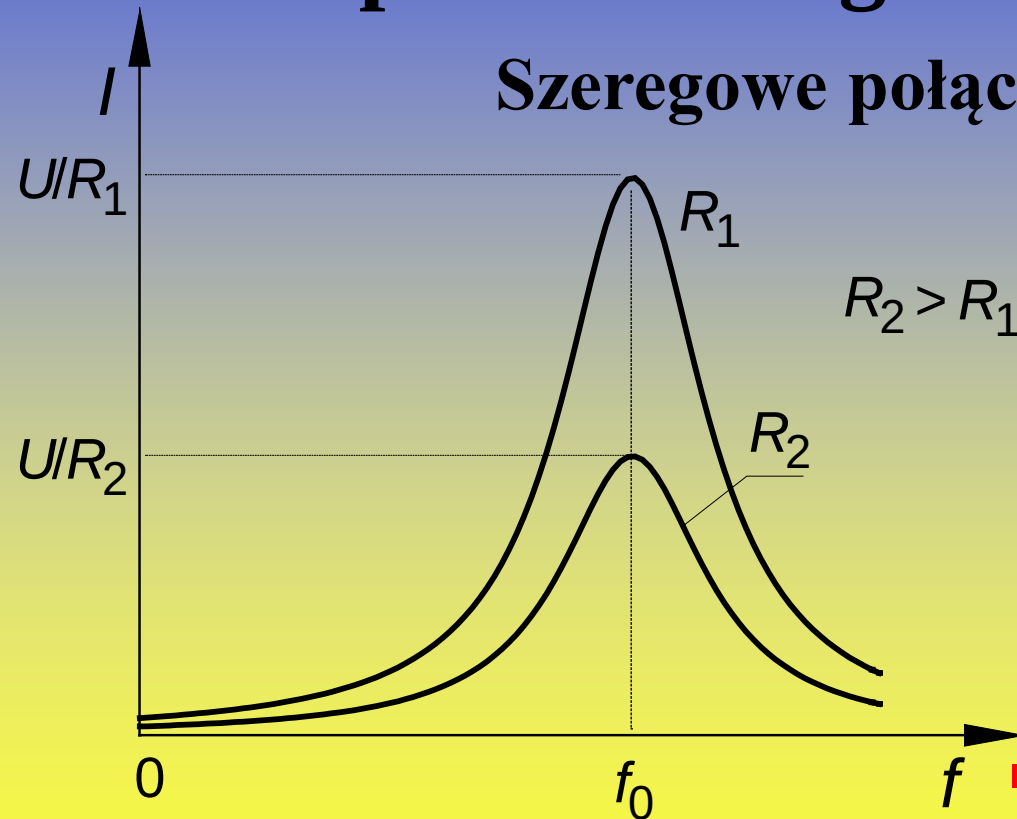
Szeregowe połączenie R , L i C



Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Szeregowe połączenie R , L i C

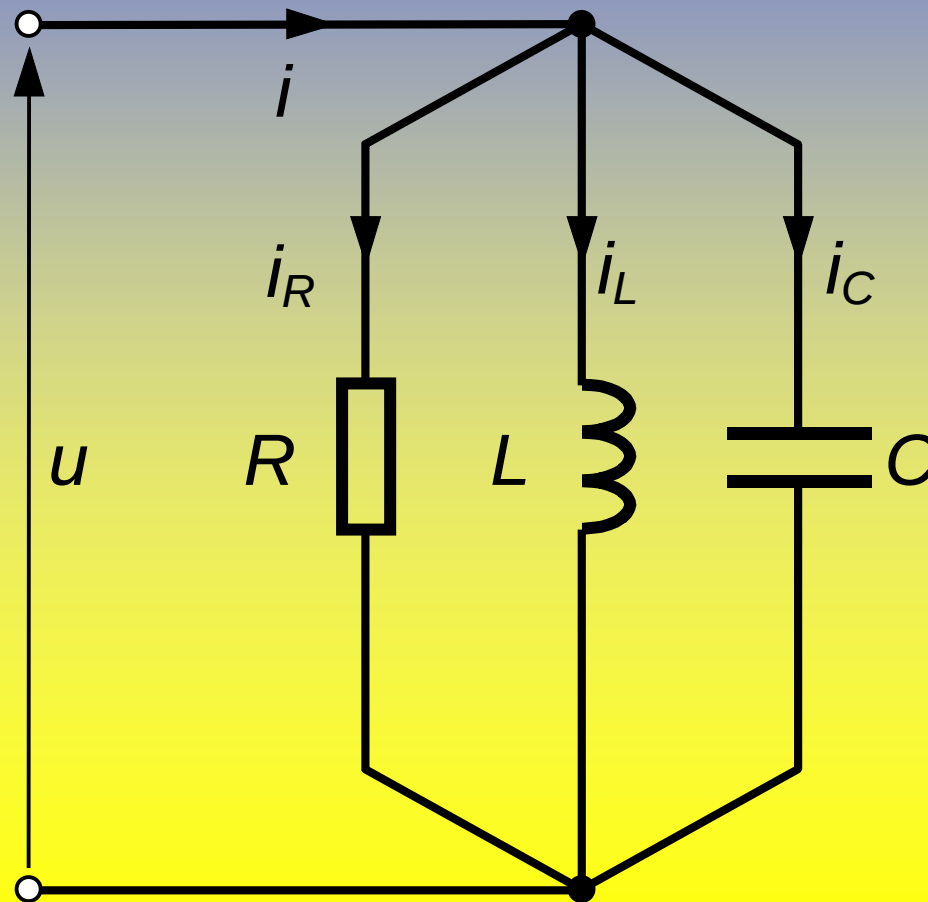


- $f > f_0 \Rightarrow X_L > X_C$ — indukcyjny;
- $f < f_0 \Rightarrow X_L < X_C$ — pojemnościowy;
- $f = f_0 \Rightarrow X_L = X_C$ — rezystancyjny
→ rezonans napięć.

Napięcie przemiennie sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Równoległe połączenie R , L i C



Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Równoległe połączenie R , L i C

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t u dt + C \frac{du}{dt}$$

$$I_R = \frac{U}{R}; I_L = \frac{U}{X_L} = \frac{U}{\omega L}; I_C = \frac{U}{X_C} = \omega C U$$

$$u = U_m \sin \omega t$$

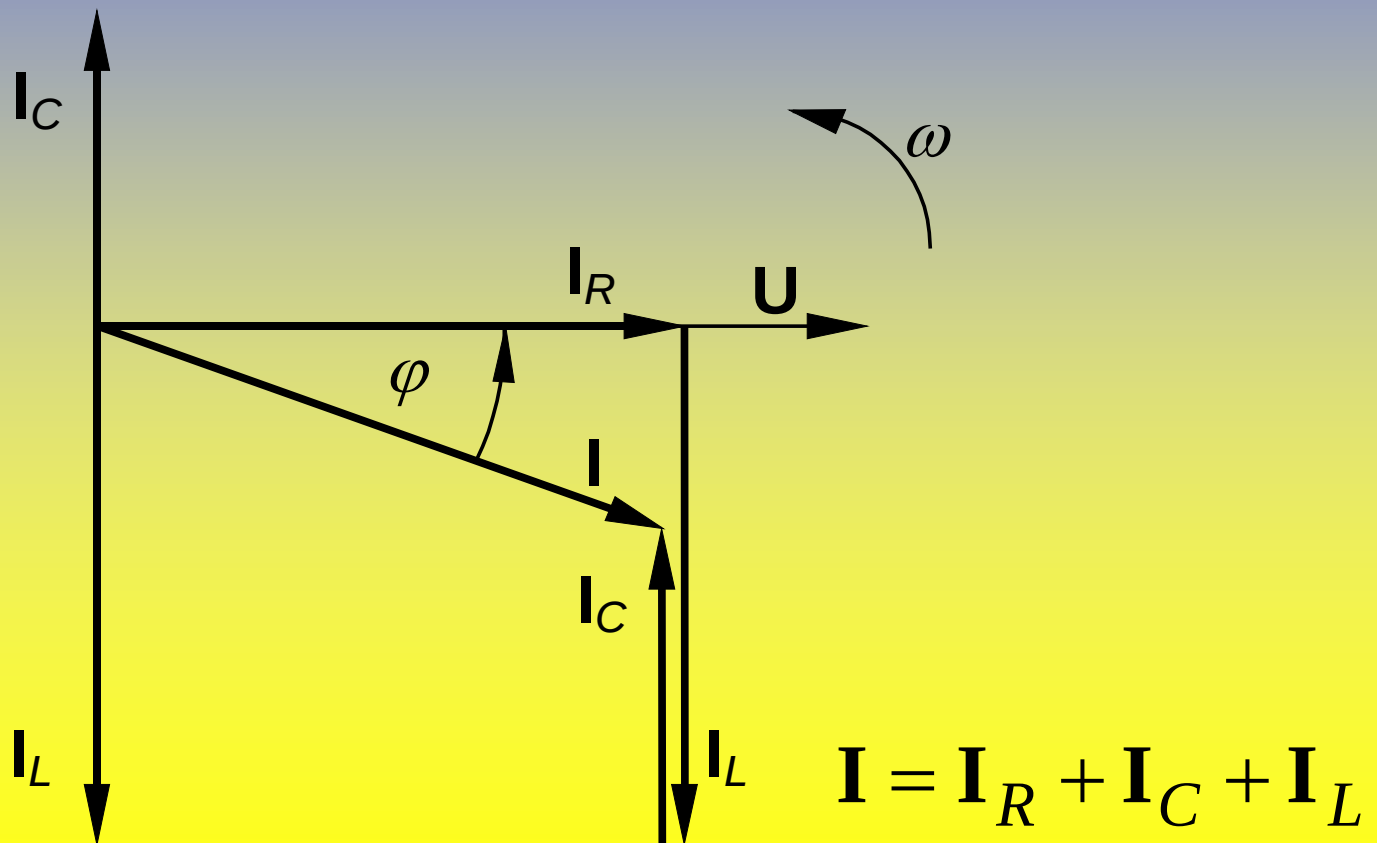
$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)?$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}; U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Równoległe połączenie R , L i C



Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Równoległe połączenie R , L i C

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{I_R^2 + (I_C - I_L)^2} = \sqrt{\left(\frac{U}{R}\right)^2 + \left(\omega C U - \frac{U}{\omega L}\right)^2} \\ &= U \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = U \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = UY \end{aligned}$$

Napięcie przemiennie sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Równoległe połączenie R , L i C

$$Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \sqrt{G^2 + (B_C - B_L)^2} = \sqrt{G^2 + B^2}$$

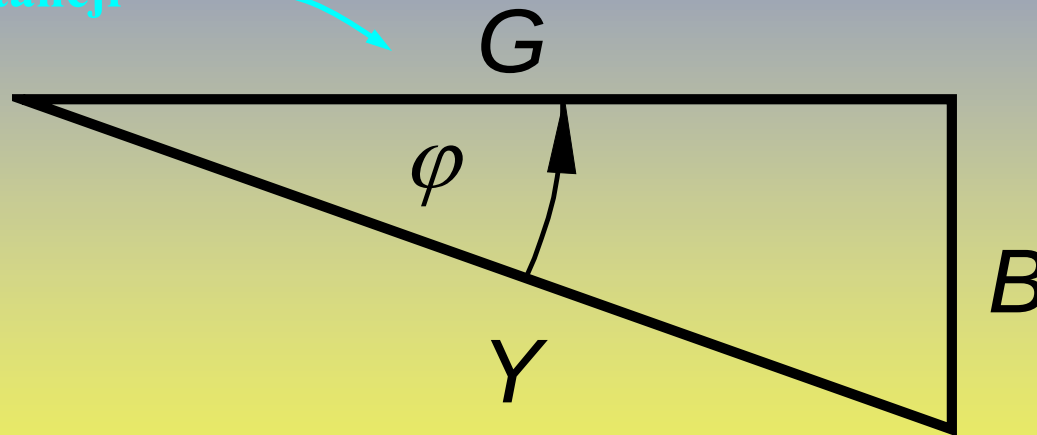
- Y — admitancja, przewodność pozorna, opór pozorny [$S = \Omega^{-1}$]
- B_C — susceptancja (przewodność bierna) pojemnościowa [$S = \Omega^{-1}$]
- B_L — susceptancja (przewodność bierna) indukcyjna [$S = \Omega^{-1}$]
- B — susceptancja wypadkowa, przewodność bierna [$S = \Omega^{-1}$]

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Równoległe połączenie R , L i C

Trójkąt admitancji



$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{B}{G} = \frac{B_C - B_L}{G} = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Równoległe połączenie R , L i C

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{B}{G} = \frac{B_C - B_L}{G} = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{G}$$

- $B > 0 \Leftrightarrow B_C > B_L \Rightarrow \varphi = \psi_u - \psi_i < 0$ — charakter pojemnościowy;
- $B < 0 \Leftrightarrow B_C < B_L \Rightarrow \varphi = \psi_u - \psi_i > 0$ — charakter indukcyjny;
- $B = 0 \Leftrightarrow B_C = B_L \Rightarrow \varphi = \psi_u - \psi_i = 0 \wedge I_L = I_C$ — charakter rezystancyjny $\rightarrow$ **r e z o n a n s p r ą d ó w**.

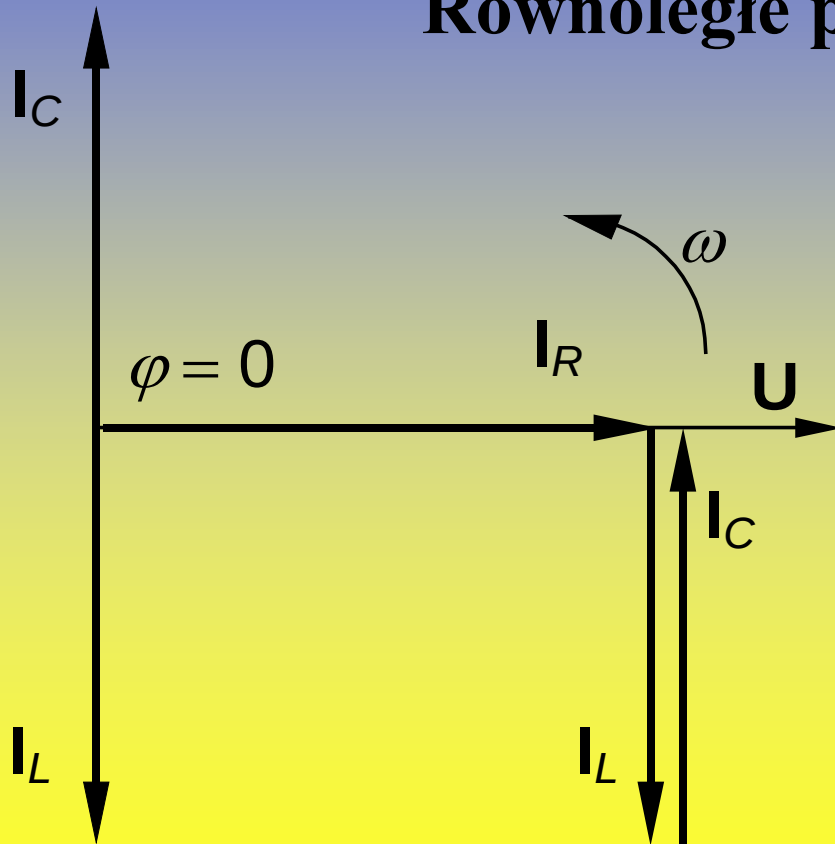
Porównanie obwodów szeregowego i równoległego

$$X > 0 \Rightarrow B < 0 \wedge X < 0 \Rightarrow B > 0$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Równoległe połączenie R , L i C



$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

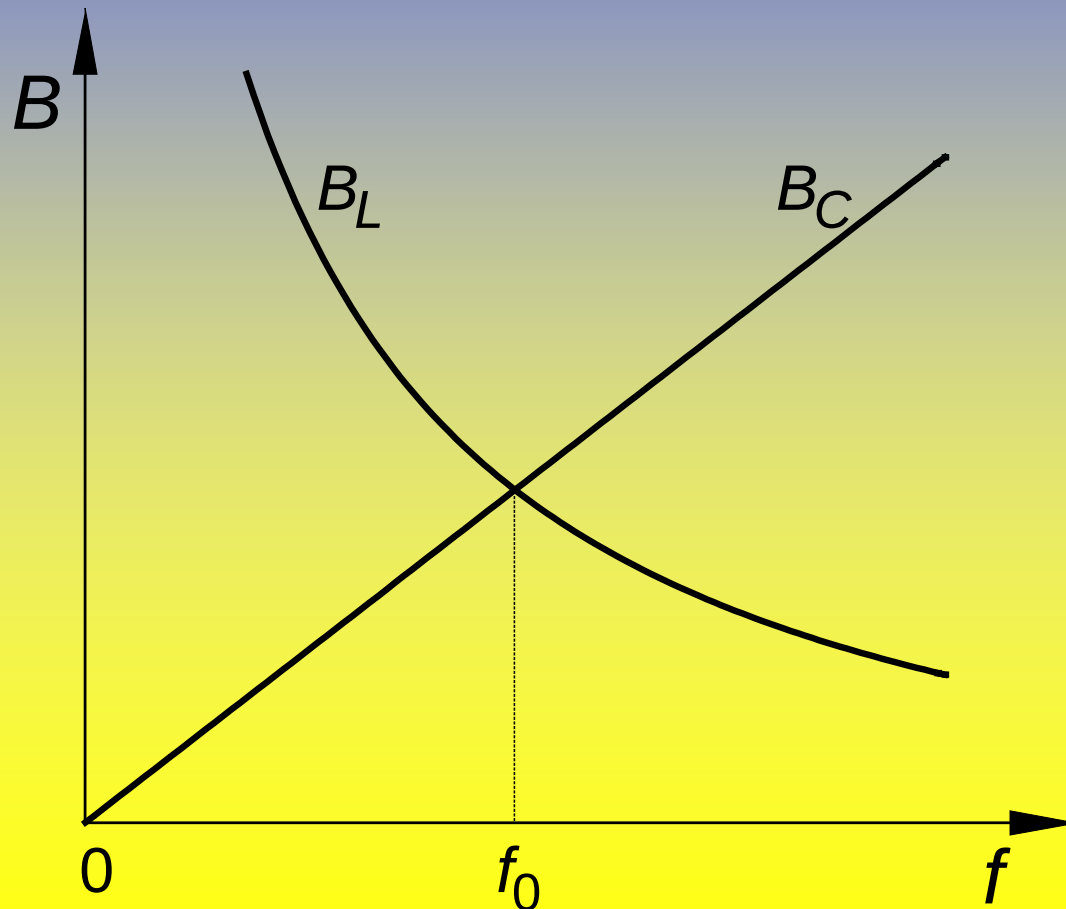


$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

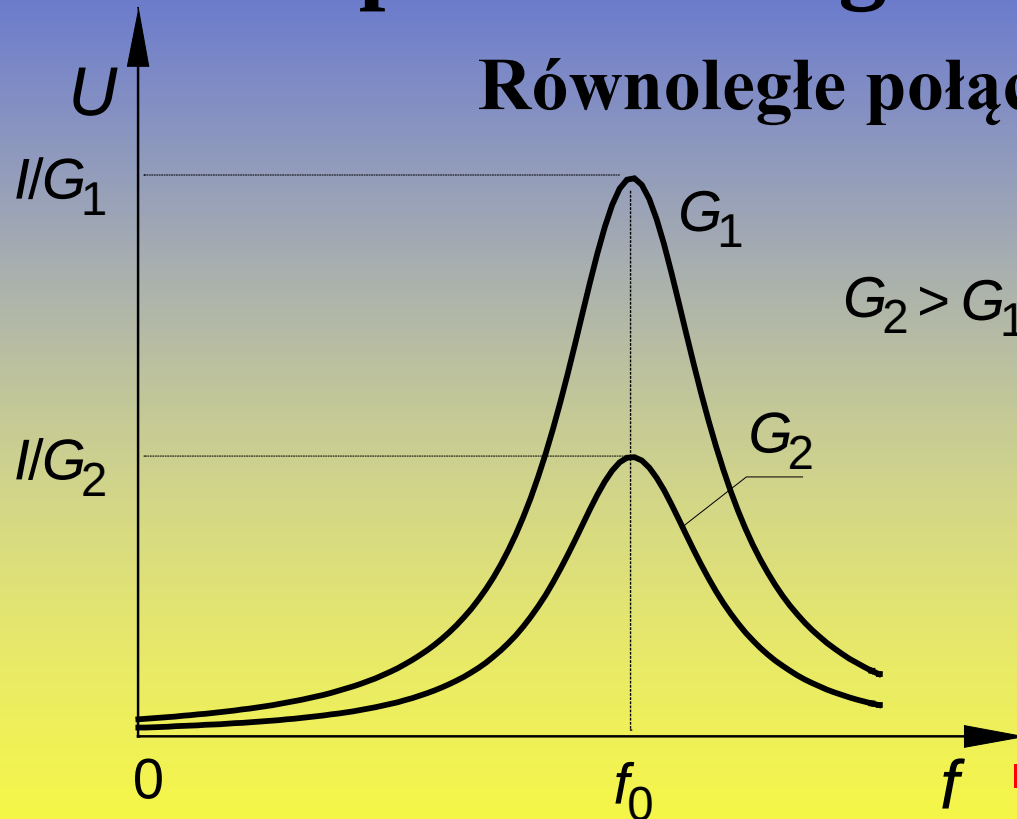
Równoległe połączenie R , L i C



Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Równoległe połączenie R , L i C



- $f > f_0 \Rightarrow B_C > B_L$ — pojemnościowy;
- $f < f_0 \Rightarrow B_C < B_L$ — indukcyjny;
- $f = f_0 \Rightarrow X_L = X_C$ — rezystancyjny
→ rezonans prądów.

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Energia w stanie rezonansu — szeregowe połączenie R , L i C

$$p = ui = L \frac{di}{dt} i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) = \frac{dw_m}{dt}$$

Cewka: $i = I_m \sin \omega t$

$$w_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} LI_m^2 \sin^2 \omega t = LI^2 \sin^2 \omega t$$

Kondensator: $u_C = U_{Cm} \sin(\omega t - \pi/2) = -U_{Cm} \cos \omega t$

$$w_e = \frac{1}{2} Cu_C^2 = \frac{1}{2} CU_{Cm}^2 \cos^2 \omega t = CU_C^2 \cos^2 \omega t$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemienne sinusoidalnego

Energia w stanie rezonansu — szeregowo połączenie R , L i C

Suma energii w stanie rezonansu

$$w_m + w_e = LI^2 \sin^2 \omega_0 t + CU_C^2 \cos^2 \omega_0 t = LI^2 = \text{const}$$



$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho \quad \text{oraz} \quad U_C = \frac{I}{\omega_0 C} = I \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ρ — impedancja charakterystyczna albo falowa [Ω]

Napięcie przemienne sinusoidalne

Elementy L i C w obwodach prądu przemiennego sinusoidalnego

Energia w stanie rezonansu — szeregowe połączenie R , L i C

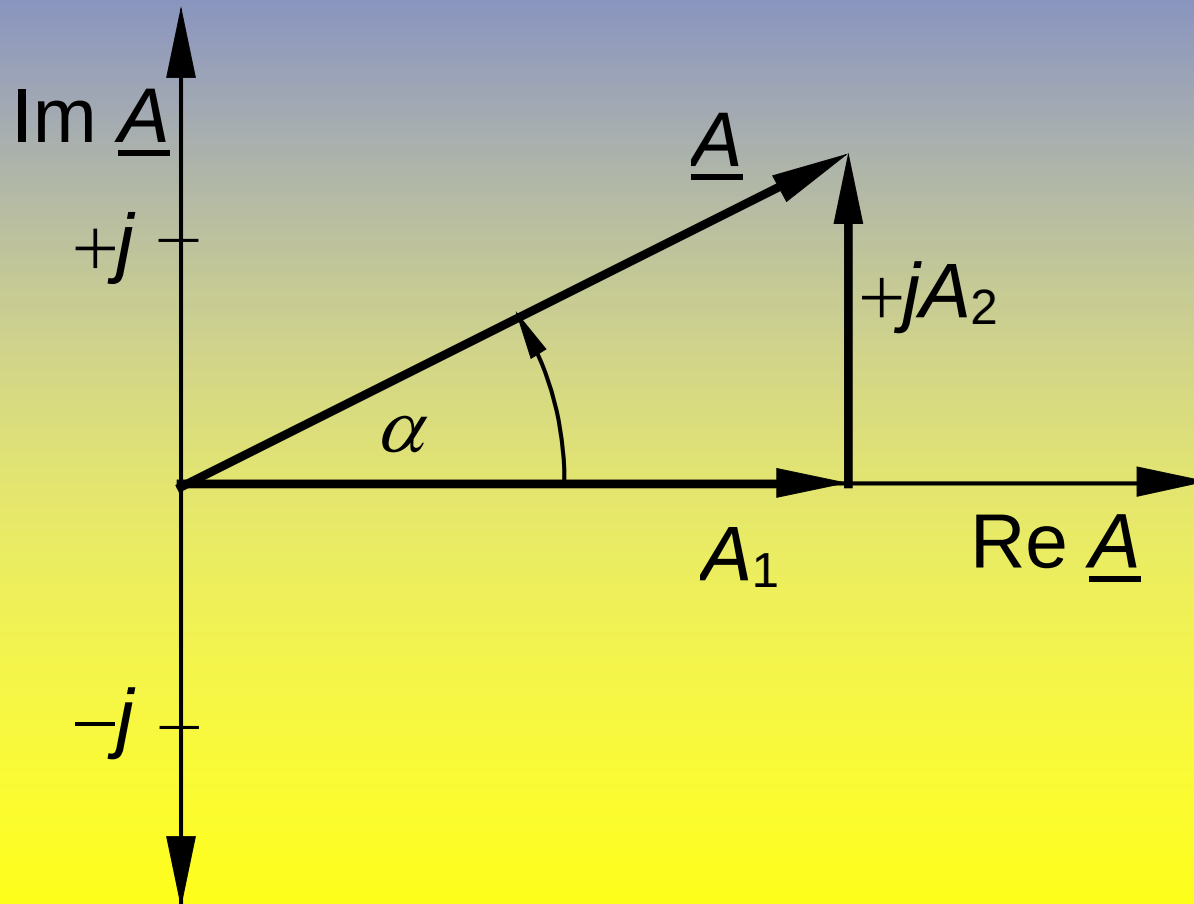
Suma energii w stanie rezonansu

Wniosek: W stanie rezonansu występuje wymiana energii między polem magnetycznym cewki i polem elektrycznym kondensatora.



Napięcie przemienne sinusoidalne

**Analiza obwodów elektrycznych
metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna**



Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Postać algebraiczna

$$\underline{A} = A_1 + jA_2$$

A_1, A_2 — rzuty wektora na osie liczb rzeczywistych i urojonych

$j = \sqrt{-1}$ — *jedność albo jednostka urojona, jednostkowa liczba urojona*

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych

metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Postać trygonometryczna

$$\underline{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

$A \cos \alpha = A_1$ — rzut wektora na oś liczb rzeczywistych

$A \sin \alpha = A_2$ — rzut wektora na oś liczb urojonych

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Postać wykładnicza

$$\underline{A} = Ae^{j\alpha}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \quad \text{— } \textit{moduł} \text{ liczby zespolonej}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}(A_2/A_1) \quad \text{— } \textit{argument} \text{ liczby zespolonej}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych

metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Zależności napięciowo-prądowe w dziedzinach
czasowej i częstotliwościowej

$$u(t) = Ri(t)$$

$$i(t) = \frac{1}{R}u(t) = Gu(t)$$

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$$

$$u(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t} = \sqrt{2} \underline{U} e^{j\omega t} \quad \wedge \quad i(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} = \sqrt{2} \underline{I} e^{j\omega t}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych

metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Zależności napięciowo-prądowe w dziedzinach
czasowej i częstotliwościowej

$$\underline{U} = R \underline{I}$$

$$\underline{I} = G \underline{U}$$

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I}$$

$$\underline{I} = \frac{1}{j\omega L} \underline{U}$$

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C} \underline{I} = -\frac{j}{\omega C} \underline{I}$$

$$\underline{I} = j\omega C \underline{U}$$

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \quad \vee \quad \underline{I} = \underline{Y} \underline{U}$$

$$-j \frac{1}{\omega C}, \text{ ponieważ } \frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j^2 \omega C} = \frac{j}{(\sqrt{-1})^2 \omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Zależności napięciowo-prądowe w dziedzinach
czasowej i częstotliwościowej

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX = Ze^{j\varphi}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad \text{—} \quad \text{moduł impedancji zespolonej}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(X/R) \quad \text{—} \quad \text{argument impedancji (przesunięcie fazowe)}$$

$$\operatorname{Re} \underline{Z} = R = Z \cos \varphi \quad \text{—} \quad \text{rezystancja obwodu}$$

$$\operatorname{Im} \underline{Z} = X = Z \sin \varphi \quad \text{—} \quad \text{reaktancja wypadkowa obwodu}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Zależności napięciowo-prądowe w dziedzinach
czasowej i częstotliwościowej

$$\underline{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB = Y e^{j\varphi'}$$

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad \text{—} \quad \text{moduł admitancji zespolonej}$$

$$\varphi' = \arctg(B/G) \quad \text{—} \quad \text{argument admitancji (przesunięcie fazowe)}$$

$$\operatorname{Re} \underline{Y} = G = Y \cos \varphi' \quad \text{—} \quad \text{konduktancja obwodu}$$

$$\operatorname{Im} \underline{Y} = B = Y \sin \varphi' \quad \text{—} \quad \text{susceptancja wypadkowa obwodu}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych

metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Zależności napięciowo-prądowe w dziedzinach
czasowej i częstotliwościowej

$$Z = \frac{1}{Y} \quad \wedge \quad \varphi = -\varphi'$$

$$R + jX = \frac{1}{G + jB} = \frac{G - jB}{G^2 + B^2}$$

$$R = \frac{G}{G^2 + B^2} \quad \wedge \quad X = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$$

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2} \quad \wedge \quad B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Zależności napięciowo-prądowe w dziedzinach
czasowej i częstotliwościowej

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{Ue^{j\psi_u}}{Ie^{j\psi_i}} = \frac{U}{I} e^{j(\psi_u - \psi_i)}$$



$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} \wedge \varphi = \psi_u - \psi_i$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Zależności napięciowo-prądowe w dziedzinach
czasowej i częstotliwościowej

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\psi_u} \quad \wedge \quad \underline{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$$



$$\underline{U} = U e^{j\psi_u} \quad \wedge \quad \underline{I} = I e^{j\psi_i}$$



$$u(t) = \underline{U}_m e^{j\omega t} = U_m e^{j\omega t} e^{j\psi_u} = U_m e^{j(\omega t + \psi_u)}$$

$$i(t) = \underline{I}_m e^{j\omega t} = I_m e^{j\omega t} e^{j\psi_i} = I_m e^{j(\omega t + \psi_i)}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Prawo Ohma

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$$

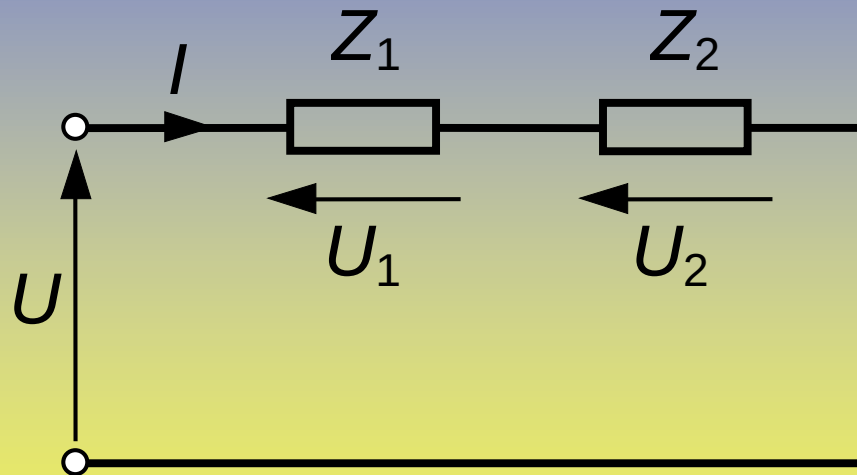
$$\underline{Z} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX$$

$$-j \frac{1}{\omega C}, \text{ ponieważ } \frac{1}{j\omega C} = \frac{j}{j^2 \omega C} = \frac{j}{(\sqrt{-1})^2 \omega C} = \frac{j}{-\omega C}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Połączenie szeregowe impedancji



$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

$$\underline{Z} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Y}_i} = \frac{1}{\underline{Y}}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Połączenie szeregowe impedancji

$$\underline{Z} = \sum_{i=1}^n R_i + j \sum_{i=1}^n X_i = (R_1 + R_2 + \dots) + j(X_1 + X_2 + \dots)$$

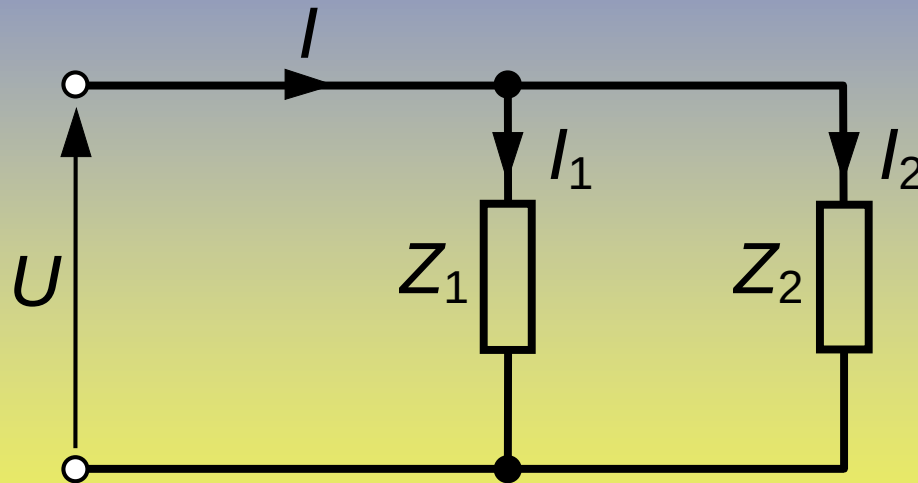
$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{(R_1 + R_2 + \dots)^2 + (X_1 + X_2 + \dots)^2} \text{ — } \textit{moduł impedancji}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X_1 + X_2 + \dots}{R_1 + R_2 + \dots} \text{ — } \textit{argument impedancji}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Połączenie równoległe impedancji



$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$

$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_i} = \frac{1}{\underline{Z}}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych

metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Połączenie równoległe impedancji

$$\underline{Y} = \sum_{i=1}^n G_i + j \sum_{i=1}^n B_i = (G_1 + G_2 + \dots) + j(B_1 + B_2 + \dots)$$

$$Y = |\underline{Y}| = \sqrt{(G_1 + G_2 + \dots)^2 + (B_1 + B_2 + \dots)^2} \quad \text{—} \quad \textit{moduł admittancji}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B_1 + B_2 + \dots}{G_1 + G_2 + \dots} \quad \text{—} \quad \textit{argument admittancji}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Prawo Ohma

$$\underline{I} = Ie^{j0}$$

$$\underline{U} = \underline{Z}\underline{I} = (R + jX)I = RI + jXI = U_R + jU_X = Ue^{j\varphi}$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + U_X^2} \quad \text{— moduł napięcia}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}(U_X / U_R) \quad \text{— argument napięcia (przesunięcie fazowe)}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

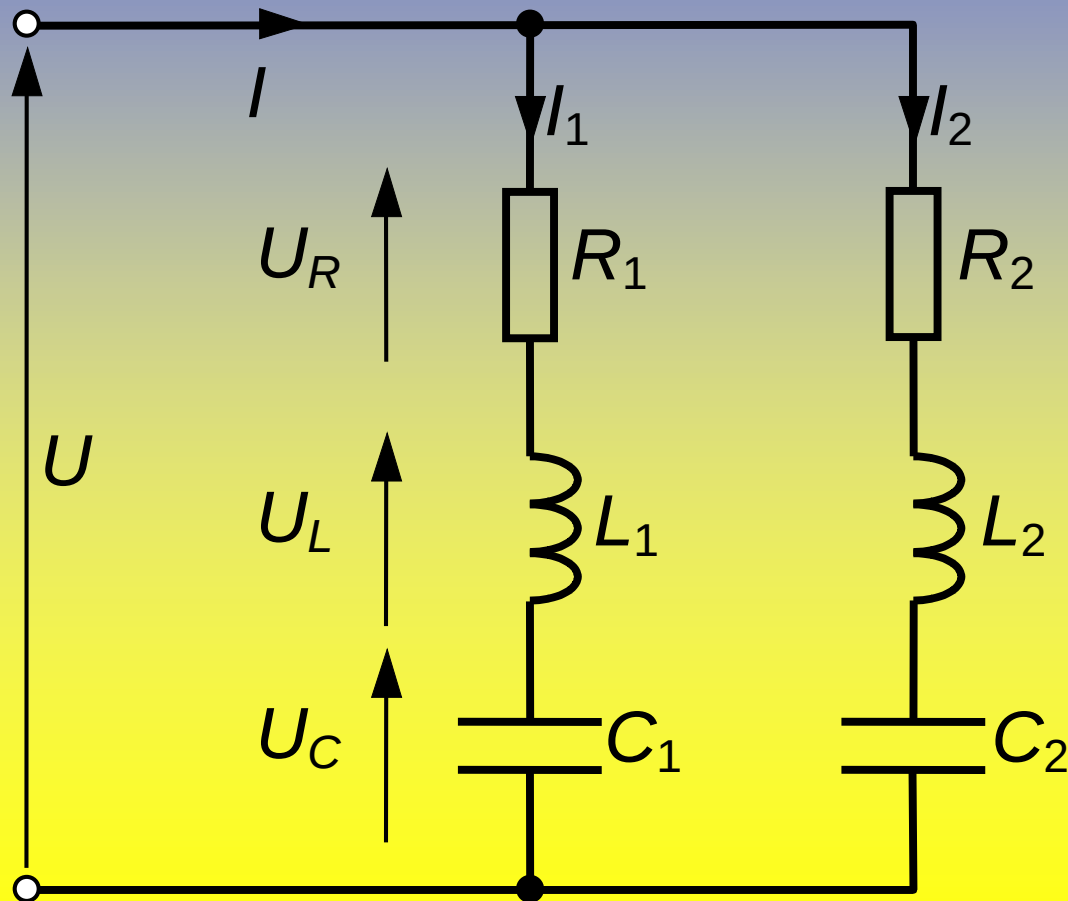
Prawo Ohma

- $\omega L > (1/\omega C) \Leftrightarrow X > 0, U_X > 0 \wedge \varphi = \psi_u - \psi_i > 0$ — charakter indukcyjny;
- $\omega L < (1/\omega C) \Leftrightarrow X < 0, U_X < 0 \wedge \varphi = \psi_u - \psi_i < 0$ — charakter pojemnościowy;
- $\omega L = (1/\omega C) \Leftrightarrow X = 0, U_X = 0 \wedge \varphi = \psi_u - \psi_i = 0$ — charakter rezystancyjny $\rightarrow$ r e z o n a n s n a p i ę ć.

Napięcie przemiennie sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Przykład



Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Przykład

$$\underline{I}_1 = I_{1c} + jI_{1b} = I_1 e^{j\varphi_1}; \quad \underline{I}_2 = I_{2c} + jI_{2b} = I_2 e^{j\varphi_2}$$

$$I_1 = \sqrt{I_{1c}^2 + I_{1b}^2} \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{I_{1b}}{I_{1c}}$$

$$I_2 = \sqrt{I_{2c}^2 + I_{2b}^2} \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{I_{2b}}{I_{2c}}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Przykład

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (I_{1c} + jI_{1b}) + (I_{2c} + jI_{2b}) \\ &= (I_{1c} + I_{2c}) + j(I_{1b} + I_{2b}) = Ie^{j\varphi}\end{aligned}$$

$$I = \sqrt{(I_{1c} + I_{2c})^2 + (I_{1b} + I_{2b})^2}$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{I_{1b} + I_{2b}}{I_{1c} + I_{2c}}$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Moc prądu przemiennego

$$\underline{U} = Ue^{j\psi_u}$$

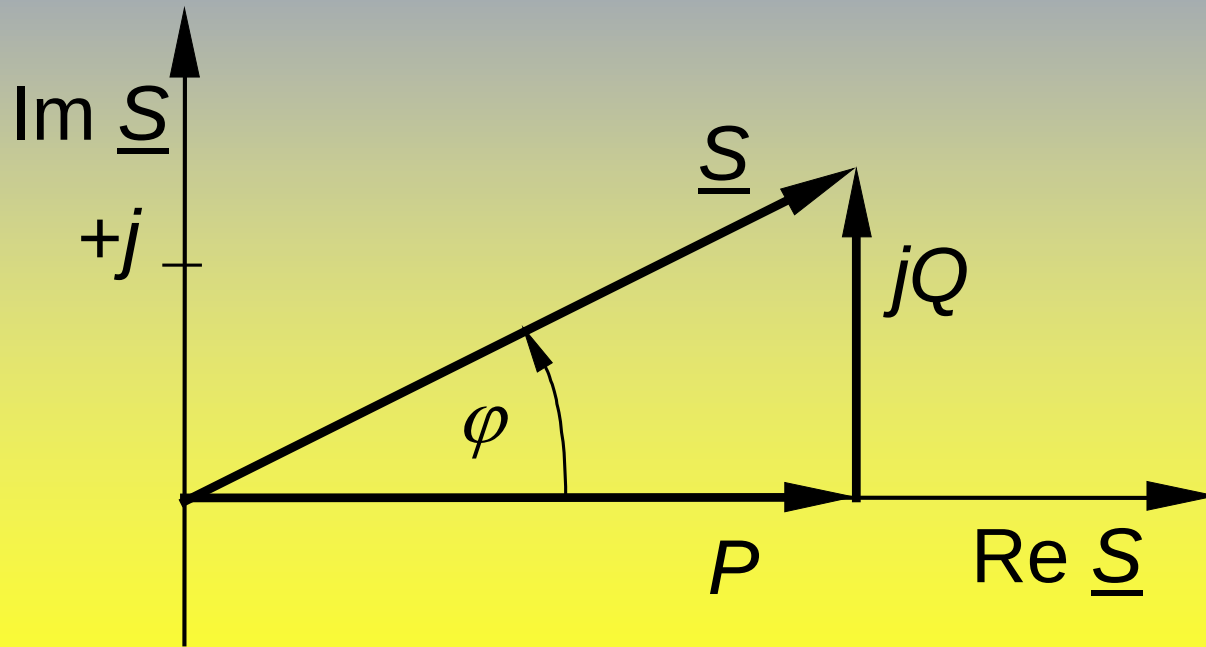
$$\underline{I} = Ie^{j\psi_i} \quad \wedge \quad \underline{I}^* = Ie^{-j\psi_i}$$

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \underline{U}\underline{I}^* = Ue^{j\psi_u} Ie^{-j\psi_i} = UIe^{j(\psi_u - \psi_i)} = UIe^{j\varphi} \\ &= UI(\cos \varphi + j \sin \varphi) = P + jQ\end{aligned}$$

Napięcie przemiennie sinusoidalne

**Analiza obwodów elektrycznych
metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna**

Moc prądu przemiennego



Napięcie przemiennie sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Moc prądu przemiennego

$$S = |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = UI$$

S — moc pozorna [VA]

P — moc czynna [W]

Q — moc bierna [var]

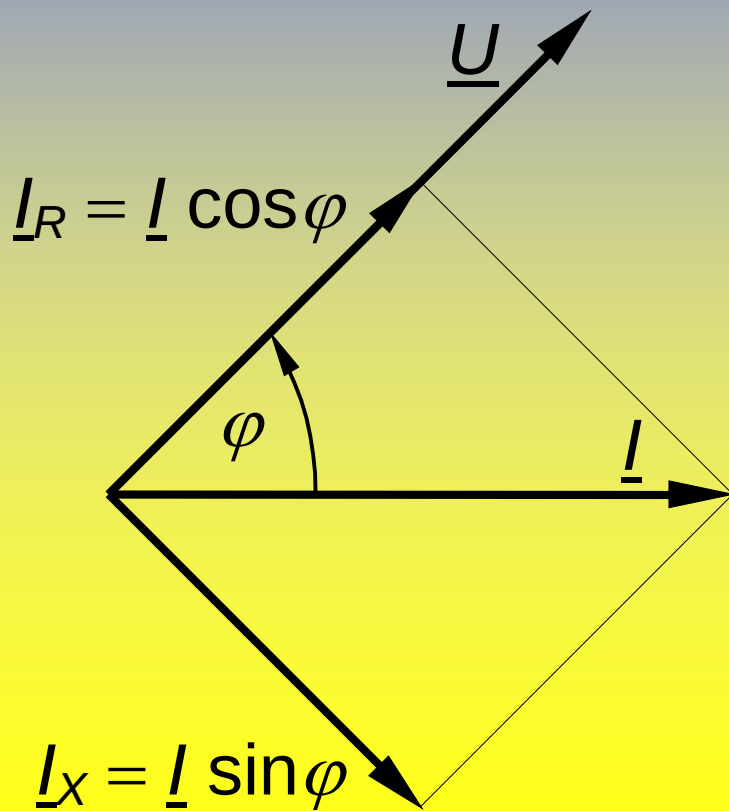
$$P = UI \cos \varphi$$

$$Q = UI \sin \varphi$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Moc prądu przemienne



$$\underline{I}_R = \underline{I} \cos \varphi \quad \text{oraz} \quad \underline{I}_X = \underline{I} \sin \varphi$$

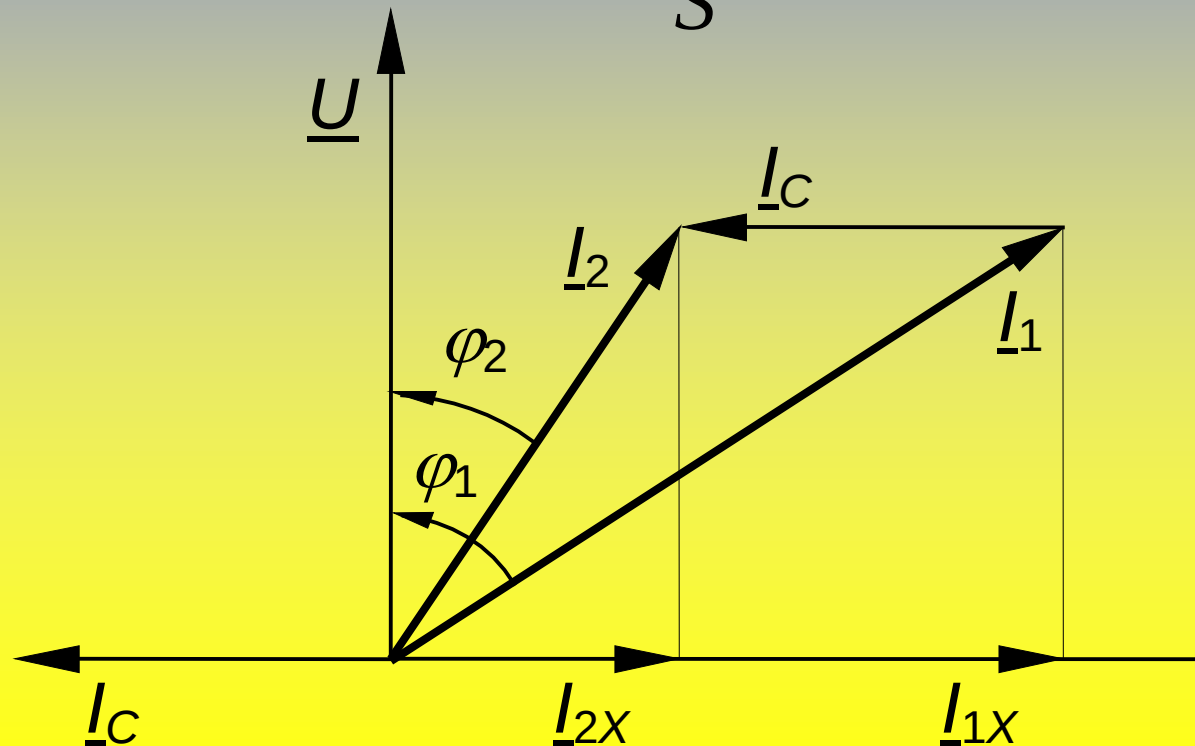
Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych

metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Współczynnik mocy

$$\cos \varphi = \frac{P}{S}$$



Napięcie przemienne sinusoidalne

Analiza obwodów elektrycznych metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna

Współczynnik mocy

Założenia:

$$\underline{I}_C = j\omega C \underline{U} \quad \wedge \quad \underline{I}_R = \text{const}$$

$$\underline{I}_C = \underline{I}_{1X} - \underline{I}_{2X} = I_R \operatorname{tg} \varphi_1 - I_R \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{P}{U} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)$$

$$\omega C U = \frac{P}{U} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)$$

Napięcie przemienne sinusoidalne

**Analiza obwodów elektrycznych
metodą liczb zespolonych. Metoda symboliczna**

Współczynnik mocy

$$C = \frac{P}{\omega U^2} (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2)$$

$$0,9 \leq \cos \varphi < 1,0$$

$$\cos \varphi_n = 0,8$$

